CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

6.2 v

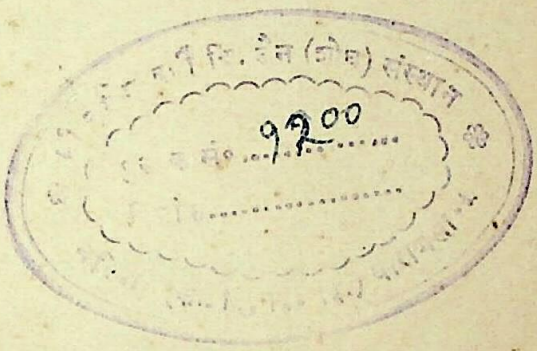
1200

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



स्कूल व कालेज की पुस्तकें तथा स्टेशनरी,
पुस्तक निकेतन
वाराणसी से खरीदिये।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

आदर्श हाईस्कूल बीजगणित एवं त्रिकोणमिति

[उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा परिषद् की हाईस्कूल परीक्षा के लिए बीजगणित के नवीनतम स्वीकृत पाठ्यक्रमानुसार पाठ्य-पुस्तक]

लेखक

जगदीशशरण रस्तोगी एम० ए०, एल० टी०

प्राध्यापक

एस० एस० डी० इण्टर कॉलेज, मेरठ

एवं

नन्दकिशोर जैन बी० एस-सी, ए० टी० सो०

देवनागरी इण्टर कॉलेज, मेरठ

आगरा बुक स्टोर

प्रकाशक एवं विक्रेता

आगरा अजमेर इलाहाबाद कानपुर

दिल्ली मेरठ लखनऊ वाराणसी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रकाशक :

आगरा बुक स्टोर

१/१२५, पचकुइयाँ, आगरा ।

प्रथम संस्करण १९६६

द्वितीय संस्करण १९६९

मूल्य : दो रुपये पचास पैसे

मुद्रक :

गुलाबचन्द अग्रवाल बी० कॉम०

ओम प्रिंटिंग प्रेस, आगरा

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भूमिका

प्रस्तुत पुस्तक की रचना उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा परिषद् की हाईस्कूल परीक्षा के लिये बीजगणित तथा त्रिकोणमिति के नवीनतम पाठ्य-क्रमानुसार हुई है। इसमें सम्मिलित हुए 'घातांक' (Indices) और 'एक अज्ञात राशि वाले द्विघात समीकरण का आलेखी हल' के अध्यायों को भी स्थान मिल गया है। यह अपने विस्तृत अनुभव के आधार पर विद्यार्थियों की हितकामना से प्रेरित होकर परिश्रमपूर्वक लिखी गई है।

भाषा सरल तथा सुगम बनाने का प्रयत्न किया गया है। इस पुस्तक में प्रश्नों की संख्या अभ्यास के लिये पर्याप्त है। छात्रों को विशेष से सामान्य की ओर, ज्ञात से अज्ञात की ओर तथा सरल से कठिन की ओर प्रेरित करने का यत्न किया गया है। प्रत्येक विषय को जितने प्रकार के प्रश्नों में बाँटना सम्भव हो सका है बाँटा गया है तथा प्रत्येक प्रकार का एक-एक प्रश्न हल करके दिखाया गया है। इन सब कारणों से विश्वास किया जाता है कि छात्रों को यह पुस्तक अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होगी।

पारिभाषिक शब्द भारत सरकार के शिक्षा विभाग द्वारा १९६४ में प्रकाशित विज्ञान शब्दावली I से लिये गये हैं। इन पारिभाषिक शब्दों के साथ इनके अँग्रेजी रूपान्तर भी दिये गये हैं।

भविष्य में पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने के लिये पाठकों के सुझावों का हार्दिक स्वागत होगा।

—लेखक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

SYLLABUS

Algebra (20 Marks)

Integers, Associative, Commutative and distributive laws. Factorisation of quadratic expressions and expressions involving the sum and difference of two cubes and the difference of two squares. Simple application of the Remainder Theorem. Cyclic factors not above third degree. H.C.F. and L.C.M. Fractions. Simple equations. Elementary elimination. Simultaneous linear equations involving two or three unknowns. Quadratic equations in one unknown quantity. Problems on the above. Graphical solutions of linear simultaneous equations. Logarithms. Laws of Indices. Graphical solution of quadratic equations in one unknown.

Trigonometry (15 Marks)

Definition of circular functions. Relation among circular functions ; values of circular functions at angles 0, 30, 45 60 and 90 degrees and multiples of these angles. Trigonometrical ratios of the sum and difference of two angles, of multiple and submultiple angles. Simple trigonometrical equations. Application to Simple cases of height and distances.

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१२००

विषय-सूची

अध्याय	विषय	पृष्ठ
१.	मूल नियम (पूर्णांक, योग का क्रम विनिमय नियम, योग का साहचर्य नियम)	१
२.	चार सरल नियम (योग, घटाना, कोष्ठक, गुणन, गुणा का क्रम विनिमय नियम, गुणा का साहचर्य नियम, गुणा का वितरण नियम, भाग)	१०
३.	सरल सूत्र और उनके प्रयोग	३३
४.	गुणनखंडन	४९
५.	गुणनखडन पर कठिन प्रश्न (शेषफल प्रमेय, चक्रीय क्रम)	७५
६.	महत्तम समापवर्तक	९१
७.	लघुतम समापवर्त्य	१०३
८.	भिन्न	११०
९.	सरल समीकरण	१२७
१०.	सरल समीकरण सम्बन्धी प्रश्न	१५५
११.	प्रारम्भिक विलोपन	१७८
१२.	सरल युगपत् समीकरण	१८८
१३.	युगपत् समीकरण सम्बन्धी प्रश्न	२१७
१४.	द्विघात अथवा वर्ग समीकरण	२३७
१५.	द्विघात समीकरण सम्बन्धी प्रश्न	२५१
१६.	लेखाचित्र अथवा रैखिक ग्राफ	२६४
१७.	लघुगणक अथवा लॉगेरिथ्म	२७९
	उत्तरमाला	२९९
१८.	घातांक सिद्धान्त	३३३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

त्रिकोणमिति

१. त्रिकोणमितीय अनुपात अथवा वृत्तीय फलन ३४७

२. कुछ कोणों के वृत्तीय फलनों के मान ३६८

३. किसी भी परिमाण के कोणों का वृत्तीय फलन ३७८

४. दो कोणों के योग तथा अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात ३९१

५. योगफलों और गुणनफलों का रूपान्तरण ४०१

६. बहुल और अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ४०७

७. सरल त्रिकोणमितीय समीकरण ४१७

८. ऊँचाई और दूरियाँ ज्ञात करने में त्रिकोणमिति का प्रयोग ४२४

उत्तरमाला ४३४

परिशिष्ट (एक अज्ञात राशि वाले द्विघात समीकरण का आलेखी हल) ४३७

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पारिभाषिक शब्दावली

(सन् १९६४ में भारत सरकार द्वारा प्रकाशित विज्ञान शब्दावली I से संकलित)

बीजगणित (Algebra)

Abscissa	भुज
Addition	योग
Algebraic	बीजीय
Arithmetic	अंकगणित
Associative Law	साहचर्य नियम
Ascending order	आरोही क्रम
Axis	अक्ष
Antilogarithm	प्रतिलघुगणक
Brackets	कोष्ठक
Common	सार्व
Character	लक्षण
Characteristic	पूर्णांश, लक्षण
Corollary	उपप्रमेय
Commutative Law	क्रम विनिमय नियम
Coefficient	गुणांक
Column	स्तम्भ
Continued multiplication	वितत गणन
Common factor	सार्व गुणनखंड समापवर्तक, उभयनिष्ठ गुणनखंड
Consecutive numbers	क्रमागत संख्या
Constant	अचर
Cyclic order	चक्रीय क्रम
Complex fraction	मिश्र भिन्न
Cross Multiplication	बज्रगुणन
Coordinates	निर्देशांक
Common System Logarithms	लघुगणक की साधारण पद्धति
Directed numbers	दिष्ट संख्याएं
Descending order	अवरोही क्रम
Distributive Law	बंटन नियम, वितरण नियम
Division	भाग, भाजन
Dividend	भाज्य
Divisor	भाजक
Demonstrator	हर
Decimal fraction	दशमलव भिन्न
Digit	अंक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Expression	व्यंजक
Elementary. elimination	प्रारम्भिक विलोपन
Eliminant	विलोपन फल, निरसन फल
Fundamental Laws	मूल नियम
Fraction	भिन्न
Fractional	भिन्नात्मक
Factor	गुणनखंड, अपवर्तक
Formula	सूत्र
Factorisation	गुणनखंडन
Fallacy	हेत्वाभास
Group	समूह
Highest Common Factor	महत्तम समापवर्तक
Hollow Square	खोखला वर्ग
Integer	पूर्णांक, पूर्ण संख्या
Index	घातांक
Identity	सर्वसमिका
Literal coefficient	अक्षर-गुणांक
Linear Graphs	रैखिक ग्राफ, लेखाचित्र
Least Common Multiple	लघुतम समापवर्त्य
Logarithms	लघुगणक, लॉगेरिथ्म
Mathematics	गणित
Minuend	व्यवकल्य
Multiplication	गुणन
Multiplicand	गुण्य
Multiplier	गुणक
Multiple	अपवर्त्य
Mantissa	अपूर्णांश
Method of comparison	तुलनात्मक विधि
Natural Numbers	प्राकृत संख्याएँ
Negative	ऋण, ऋणात्मक
Numerical	संख्यात्मक
Numerator	अंश
Ordinate	कोटि
Origin	मूल बिन्दु
Positive	धन, धनात्मक
Power	घात
Product	गुणनफल
Prime	अभाज्य
Problem	प्रश्न
Plot the Point	बिन्दु का आलेखन करना
Quadrant	पाद
Quotient	भागफल
Quadratic	द्विघात
Remainder	शेषफल
Theorem	प्रमेय
Reciprocal	व्युत्क्रम
Equation	समीकरण
Symbol	संकेत
Substitution	प्रतिस्थापन
Subtraction	घटाना, व्यवकलन
Subtrahend	व्यवकलित
Sum	योगफल
Sign of operation	प्रक्रिया चिह्न
Suitable	उपयुक्त
Simple equation	सरल समीकरण
Solve	हल करना

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Solid square	ठोस वर्ग
Simultaneous equation	युगपत समीकरण
Term	पद
Transposition	पक्षान्तरण
Unity	एक
Unknown	अज्ञात
Quantity	राशि
Vinculum	रेखा कोष्ठक
Verification	उत्तर की सत्यता की जाँच
X-Axis	य-अक्ष
Y-Axis	र-अक्ष

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

Angle of elevation	उन्नयन कोण
Angle of Depression	अवनमन कोण
Circular function	वृत्तीय फलन
Cosine	कोटिज्या
Cotangent	कोस्पज्या
Cosecant	व्युत्क्रमज्या
Circular measure	वृत्तीय माप
Radian	रेडियन
Sine	ज्या
Secant	व्युत्क्रम कोटिज्या
Trigonometrical equation	त्रिकोणमितीय समीकरण
Trigonometrical ratios	त्रिकोणमितीय अनुपात
Tangent	स्पज्या

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १

मूल नियम
(FUNDAMENTAL LAWS)

प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers)—अंकगणित में इकाई के दोहराने को संख्याओं से निरूपित करते हैं। इस प्रकार शून्य से आरम्भ करके क्रमानुसार इकाई जोड़ने से संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

अतः $0+1=+1, 0+1+1=+2, 0+1+1+1=+3, \cdots$

जहाँ $+1, +2, +3, \cdots$ अंकगणित की प्राकृत संख्याएँ (Natural numbers) हैं।

पूर्ण संख्या अथवा पूर्णांक (Integers)

१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२,···धन पूर्णांक अथवा धन संख्याएँ (Positive Integers of Positive Numbers) कहलाती हैं, जहाँ कि १२ के बाद तीन बिन्दु (···) लगाने का अर्थ है कि १२ के आगे की अनगिनित संख्याएँ १३, १४, १५····भी इसी समूह में सम्मिलित हैं।

शून्य से इकाई के बार-बार घटाने से संख्याओं का एक दूसरा समूह बनता है। जैसे

$0-1=-1, 0-1-1=-2, 0-1-1-1=-3, \cdots$

दोनों समूहों को मिलाने से निम्न समूह बनता है :—

$\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$

जिनमें धन, ऋण एवं शून्य सभी संख्याएँ हैं। इनमें से प्रत्येक संख्या पूर्णांक अथवा पूर्ण संख्या (Integer) कहलाती है। -3 के पहले और $+3$ के बाद तीन-तीन बिन्दु (...) लगाने का अर्थ है कि -3 के पहले और $+3$ के आगे की सभी संख्याएँ $-4, -5, -6, \ldots$ और $+4, +5, +6, \ldots$ इसी समूह में सम्मिलित हैं। इस समूह का सार्व लक्षण (Com-

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

mon Characteristic) यही है कि इसकी प्रत्येक संख्या अपने से पहली संख्या में एक इकाई जोड़ने से प्राप्त होती है।

दिष्ट संख्याएँ (Directed Numbers)—शून्य के दोनों ओर संख्यांओं के चिह्नों के लक्षण एक-दूसरे के विपरीत होते हैं। शून्य के बाद की सभी संख्याएँ धन और शून्य से पहले की सभी संख्याएँ ऋण कहलाती हैं। जिन संख्याओं के पहले धन अथवा ऋण चिह्न लगे होते हैं उन्हें **दिष्ट संख्याएँ** (Directed Numbers) कहते हैं।

बीजगणित (Algebra)—पिछली कक्षाओं में तुम पढ़ चुके हो कि वर्ण-माला के क, ख, ग, ..., य, र, ल, ... आदि अक्षरों को, जिन्हें संख्याओं को प्रगट करने के लिये संकेत अथवा प्रतीक (symbol) के रूप में लिया जाता है, **बीज** कहते हैं।

गणितशास्त्र की उस शाखा को जिसमें संख्याओं अथवा राशियों को प्रगट करने के लिये अंकों के अतिरिक्त अक्षरों (बीजों) का भी प्रयोग होता है **बीजगणित** (Algebra) कहते हैं।

चिह्नों के नियम—पिछली कक्षाओं में तुमने पढ़ा है कि +क वही है जो क है अर्थात् धन चिह्न (+) लगने से वस्तु लक्षण (Character) नहीं बदलता। इस कारण +(+क), +क है और +(−क), −क है।

इसके विपरीत ऋण चिह्न (−) पहले लगने से वस्तु का लक्षण ही बदल जाता है। इस कारण −(+क), −क है और −(−क), + क है। अतएव

+(+क) = +क ; −(−क) = +क

+(−क) = −क ; −(+क) = −क

यदि यही क्रिया एक पद के साथ-साथ कई पदों के साथ करनी हो, तो

+(+क−ख+ग−घ+···) = +क−ख+ग−घ+···

प्रत्येक पद का लक्षण अपरिवर्तनीय है ;

−(+क−ख+ग−घ+···) = −क+ख−ग+घ−···

प्रत्येक पद का लक्षण बदल जाता है, धन ऋण में और ऋण धन में।

अनुमान—किसी राशि के घटाने का अर्थ है कि उसके विपरीत लक्षण की वही राशि जोड़ना।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

ज्यामितीय विधि—हम जानते हैं कि यदि किसी सरल रेखा पर प और फ कोई दो बिन्दु हों, तो +पफ = —फप और +फप = —पफ

अतएव यदि पफ, +क प्रगट करती हो, तो पफ, —क प्रगट करेगी। इस प्रकार +पफ = —फप से

+(+क) = —(—क)

और +फप = —पफ से,

+(—क) = —(+क)

क्रम विनिमय नियम (Commutative Law)—हम जानते हैं कि

१५ + १७ + २१ = ५३

१७ + २१ + १५ = ५३

२१ + १५ + १७ = ५३

और ५क + ७क + ३क = १५क

३क + ७क + ५क = १५क

७क + ३क + ५क = १५क

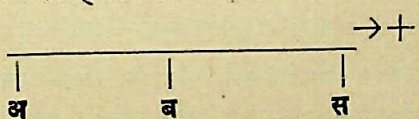
इस प्रकार विभिन्न पदों के योग पर उनके स्थान अथवा क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता अर्थात् योग की राशियाँ किसी भी क्रम में रखी जा सकती हैं। इसे योग का क्रम विनिमय नियम (Commutative Law of Addition) **कहते हैं।**

यदि किसी व्यंजक में एक ही साथ कोई राशि जोड़ दी जाये और निकाल भी ली जाय, तो फल में कोई अन्तर नहीं होता है क्योंकि जो हमने जोड़ा है वही हमने निकाल दिया है।

अतः +क+ख = —क+क+ख+क = +ख+क

और +क—ख = —क+क—ख+क = —ख+क

ज्यामितीय विधि—किसी सरल रेखा में तीन बिन्दु अ, ब और स इस प्रकार लिये गये हैं कि अब = +क और बस = +ख



तो अब+बस = अस = —सअ = —(सब+बअ)

= —सब —बअ = बस + अब

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ +क+ख=+ख+क

यदि अब=+ख और अस=+क हो, तो

अस—अब=बस=बअ+अस

∴ +क—ख=—ख+क

[अतः व्यापक रूप में]

+क—ख+ग—घ+···
=—ख+क+ग—घ+···
=—ख+ग+क—घ+···
=+ग—ख—घ+क+···
= ··· ··· ··· ···· ···

स्पष्ट है कि जोड़ और घटाने के प्रश्न में क्रिया किसी भी क्रम से की जा सकती है।

अतएव +क—ख+ग—घ+····
=+क+ग+···—ख—घ—···
=(+क+ग+···)—(ख+घ+···)

अर्थात् जोड़ और घटाने के प्रश्नों में जोड़ और घटाने की क्रिया सामुहिक रूप में की जा सकती है।

साहचर्य नियम (Associative Law)—हम जानते हैं कि

१५+१७+२१ =५३
(१५+१७)+२१ =३२+२१=५३
१५+(१७+२१) =१५+३८=५३

अतः १५+१७+२१ =(१५+१७)+२१
=१५+(१७+२१)

और क+ख+ग =(क+ख)+ग=क+(ख+ग)

अतः राशियों की श्रेणी का योग विभिन्न पदों के अलग-अलग समूह बनाकर प्रत्येक समूह में राशियों को जोड़कर तथा इसके पश्चात् सब समूहों को जोड़कर ज्ञात किया जा सकता है। इसे योग का साहचर्य नियम (Associative Law for Addition) कहते हैं। अतः

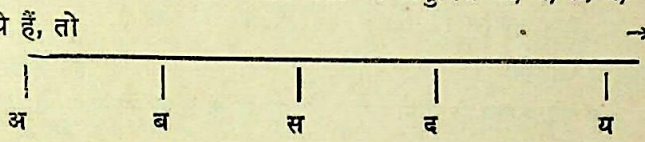
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$
\begin{aligned}
&+\text{क}-\text{ख}+\text{ग}-\text{घ}+\cdots \\
&\quad =+\text{क}+(-\text{ख}+\text{ग}-\text{घ}+\cdots) \\
&\quad =+\text{क}-\text{ख}+(+\text{ग}-\text{घ}+\cdots) \\
&\quad =+\text{क}+(-\text{ख}+\text{ग})-\text{घ}+\cdots) \\
&\quad =+(+\text{क}-\text{ख})+(+\text{ग}-\text{घ}+\cdots) \\
&\quad =+(+\text{क}-\text{ख}+\text{ग})+(-\text{घ}+\cdots) \\
&\quad = \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

अर्थात् जोड़ने तथा घटाने की श्रेणी में क्रिया समूहों में की जा सकती है।

ज्यामितीय विधि—किसी सरल रेखा के अनुदिश अ, ब, स, द, य बिन्दु लिये गये हैं, तो



$$
\begin{aligned}
\text{अय} &= \text{अब}+\text{बस}+\text{सद}+\text{दय} \\
&= \text{अब}+\text{बय}=\text{अब}+(\text{बस}+\text{सद}+\text{दय}) \\
&= \text{अस}+\text{सय}=\text{अब}+\text{बस}+(\text{सद}+\text{दय}) \\
&= \text{अद}+\text{दय}=(\text{अब}+\text{बस}+\text{सद})+\text{दय}
\end{aligned}
$$

यदि अब $=+$क, बस $=-$ख, सद $=+$ग,

दय $=-$घ हो, तो

$$
\begin{aligned}
+\text{क}-\text{ख}+\text{ग}-\text{घ} &= +\text{क}+(-\text{ख}+\text{ग}-\text{घ}) \\
&= +\text{क}-\text{ख}+(+\text{ग}-\text{घ}) \\
&= (+\text{क}-\text{ख})+(+\text{ग}-\text{घ}) \\
&= (+\text{क}-\text{ख}+\text{ग})-\text{घ}
\end{aligned}
$$

पद (Term)—बीजगणित में ख, ३ख, पफ, ८पफ, $\frac{\text{ख}}{\text{३}}$, $\frac{\text{५पफ}}{\text{ग}}$ में से प्रत्येक को पद कहते हैं अतः एक अक्षर अथवा गुणा तथा भाग के चिह्नों से जुड़े हुए एक से अधिक अंक व अक्षर पद कहलाते हैं।

व्यंजक (Expression)—जब दो या दो से अधिक पद धन व ऋण के चिह्नों से जुड़े हुए होते हैं, तो इस संगठन को व्यंजक कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जैसे ५क+७ख—४कख तथा प+य—$\frac{३कख}{५ल}$ आदि व्यंजक हैं।

गुणांक (Coefficient)—माना कि कोई पद ८ कखग है। इसमें ८, कखग का ८क, खग का तथा ८कख, ग का गुणांक कहलाता है।

यदि किसी पद का गुणांक केवल संख्या ही है तो उस गुणांक को **संख्या गुणांक** (numerical co-efficient) कहते हैं। जैसे ८कखग में ८, कखग का संख्या गुणांक है। यदि किसी पद के पहले कोई संख्या गुणांक के रूप में न हो तो उसका संख्या गुणांक १ होता है; जैसे—कग में कग का संख्या गुणांक और प में प का संख्या गुणांक १ है। यदि किसी पद का गुणांक केवल अक्षर हों तो उसे अक्षर गुणांक (Literal co-efficient) कहते हैं।

घात व घातांक (Power and Index)—क×ख को कख से और क×ख×ग को कखग से प्रगट करते हैं, परन्तु क×क को कक से प्रगट नहीं करते, बल्कि उसको $क^२$ से प्रगट करते हैं।

इसी प्रकार क×क×क को $क^३$ तथा क×क×क×क को $क^४$ से प्रगट करते हैं।

$क^२$ को क की दूसरी घात अथवा क घात दो कहते हैं।
$क^३$ को क की तीसरी घात अथवा क घात तीन और
$क^४$ को क की चौथी घात अथवा क घात चार कहते हैं।

यदि किसी राशि को उसी राशि से कई वार गुणा करें तो गुणनफल उस राशि का **घात** (Power) कहलाता है जैसे $क^न$ को क की न की घात कहेंगे। उस संख्या (अंक या अक्षर) को जो किसी अन्य राशि का घात बताती है, **घातांक** (Index) कहते हैं। घातांक को राशि के दाहिनी ओर थोड़ा-सा ऊपर को छोटी लिपि में लिखते हैं जैसे $ख^८$ में घातांक हैं और 'ख' आधार है।

जब घातांक १ होता है तो उसे लिखा नहीं जाता जैसे क का अर्थ है क की घात एक।

अवरोही क्रम (Descending Order)--यदि किसी व्यंजक के पदों में एक अक्षर के विभिन्न घात हों और उसमें वे पद इस प्रकार रखे हों

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कि सर्वप्रथम (बायीं ओर) वह पद रहे जिसमें उस अक्षर का सबसे बड़ा घात है, उसके बाद वह पद रहे जिसमें उस अक्षर का उससे छोटा घात हो, इसी प्रकार क्रमवार रखते-रखते अन्त में वह पद हो जिसमें उस अक्षर का सबसे छोटा घात हो अथवा वह पद हो जिसमें वह अक्षर न हो तो उस व्यंजक को उस अक्षर के **अवरोही क्रम** में रखा हुआ कहते हैं, जैसे—व्यंजक $४क^{४}+७क^{३}-२क^{२}+३क-१५$ अक्षर 'क' के अवरोही क्रम में हैं।

आरोही क्रम (Ascending Order)—यदि किसी व्यंजक के पदों में एक अक्षर के विभिन्न घात हों और उसमें वे पद इस प्रकार रखे हों कि सर्वप्रथम (बायीं ओर) वह पद रहे जिसमें उस अक्षर का सबसे छोटा घात है अथवा वह पद ही जिसमें वह अक्षर नहीं है, उसके बाद वह पद रहे जिसमें उस अक्षर का सबसे बड़ा घात हो, इसी प्रकार क्रमवार रखते-रखते अन्त में वह पद रहे जिसमें उस अक्षर का सबसे बड़ा घात हो तो उस व्यंजक को उस अक्षर के **आरोही क्रम** में रखा हुआ कहते हैं, जैसे—व्यंजक $४+३यर+४य^{२}र^{३}-५य र^{३}+६य^{४}र^{२}$ अक्षर 'र' के आरोही क्रम में है।

प्रतिस्थापन (Substitution)—तुम पढ़ चुके हो कि बीजगणित में अक्षर किसी-न-किसी संख्या को प्रकट करते हैं। यदि किसी पद के अक्षरों का मूल्य अंकों में ज्ञात हो तो हम अक्षरों के स्थान पर उन अंकों को लिख कर उस पद का मान सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं। इस क्रिया को **प्रतिस्थापन** कहते हैं।

उदाहरण १. यदि क=६, ख=१५, और ग=०, तो निम्नलिखित व्यंजक का मान बताओ :—

$$३कख-५खग-१२क+\frac{२ख}{३}$$

क्रिया : $३कख-५खग-१२क+\frac{२ख}{३}$

$$=३\times६\times१५-५\times१५\times०-१२\times६+\frac{२\times१५}{३}$$

$$=२७०-०-७२+१०$$

$$=२८०-७२=२०८$$ **उत्तर**

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. यदि य = १, र = २, और ल = — ३, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात करो :—

$$\frac{य^2+र^2+ल^2}{३य+र+ल}-ल^3+५र^3$$

क्रिया : $\frac{य^2+र^2+ल^2}{३य+र+ल}-ल^3+५र^3$

$$=\frac{(१)^2+(२)^2+(-३)^2}{३\times१+२+(-३)}-(-३)^3+५(२)^3$$

$$=\frac{१+४+९}{३+२-३}+२७+४०$$

$$=\frac{१४}{२}+२७+४०=७+२७+४०=७४।$$ उत्तर

प्रश्नावली १

१. यदि एक फुटबाल के मैच में एक टीम के २ गोल से जीतने को +२ गोल से प्रकट करते हैं, तो —२ गोल से क्या प्रकट होता है ?

२. यदि २ किलोमीटर दक्षिण की ओर को जाना —२ किलोमीटर से प्रकट करते हैं, तो ३ किलोमीटर उत्तर की ओर जाने को किस चिह्न से प्रकट करेंगे ?

३. यदि प्रातः १० बजे से दोपहर के १२ बजे तक के समय को +२ घण्टे से प्रकट करते हैं, तो प्रातः १० बजे से प्रातः ८ बजे तक के समय को कौनसे चिह्न से प्रकट करेंगे ?

यदि क = १, ख = २, ग = ३, घ = ०, य = ४, र = ५ हो, तो निम्नलिखित का मान बताओ :

४. ३क—ख—ग+२य

५. ३य+४र—५क—६ख

६. र—२य+४ग—३ख

७. १३ख^2+४ग^2—५य^2+७घ^2

यदि क = १$\frac{१}{२}$, ख = $\frac{१}{३}$, ग = २$\frac{१}{४}$, घ = $\frac{२}{५}$ हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात करो :—

८. २क—५ख+५घ

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. ३क—४ख+२ग—१०घ

१०. ५क—७ख—३ग+९घ

११. ६ख—५ग+४घ—३क

यदि क=५, ख=—२, ग=३, य=०, र=$\frac{२}{३}$ तो निम्नलिखित का मान बताओ :—

१२. $\frac{३कख}{२ग}-\frac{४गर}{ख}\times\frac{४क}{ख}+\frac{२७रख}{ग}$

१३. $\frac{२क-ख}{ग-ख}-\frac{४ग+५क}{३र}+\frac{६र-३ग}{ख}+\frac{३य-ख}{क}$

यदि क=१, ख=२, ग=३, तो निम्नलिखित का मान बताओ :—

१४. $३क^{२}ख^{३}ग^{४}$

१५. $क^{४}+३ख^{२}ग$

१६. $\frac{५क^{३}-ख^{२}}{२ग^{२}}$

१७. $क^{३}+ख^{३}+ग^{३}-३कखग$

यदि य=२, र=१०, और ल=१२ तो निम्न के मान बताओ :—

१८. $य^{२}र+र^{२}ल-ल^{२}य$

१९. $\sqrt{५यर}-\sqrt{६यल}+\sqrt{३०रल}$

२०. $\sqrt{८यल^{२}}+\sqrt{१०य^{२}र}-\sqrt{५यरल^{२}}$

४४२७ —५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय २

चार सरल नियम
(THE FOUR SIMPLE RULES)

प्रस्तावना—पिछली कक्षाओं में तुम चारों नियम पढ़ चुके हो। दोहराने के लिये हम इन नियमों पर पुनः विचार करते हैं।

योग (Addition)

(i) धनात्मक सजातीय पदों का जोड़

इस स्थिति में योगफल धन होता है, योगफल भी वैसा ही सजातीय पद है, जैसे जोड़े जाने वाले पद हैं और योगफल में संख्या गुणांक सब पदों के संख्या गुणांकों का योगफल होता है।

उदाहरण : ५कख + १२कख + १७कख = (५ + १२ + १७) कख
= ३४कख।

(ii) दो सजातीय राशियों का योगफल, जिनमें एक राशि धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक हो, उनके अन्तर के बराबर होता है। यदि धनात्मक राशि बड़ी होती है तो योगफल धनात्मक और यदि ऋणात्मक राशि बड़ी होती है तो योगफल ऋणात्मक होता है।

उदाहरण १. १०क + (— ७क) = ३क
और —१०क + (+७क) = — ३क

(iii) ऋणात्मक सजातीय पदों का जोड़

इस स्थिति में योगफल ऋण होता है, योगफल भी वैसा ही सजातीय पद है, जैसे जोड़े जाने वाले पद हैं और योगफल में संख्या गुणांक सब पदों के संख्या गुणांकों का योगफल होता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $-४क+(-९क)+(-१५क)=-(४+९+१५)क$
$=-२८क$ ।

(iv) जब कुछ पद धनात्मक और कुछ पद ऋणात्मक हों

इस स्थिति में समस्त धन पदों तथा समस्त ऋण पदों को अलग-अलग जोड़ लो। फिर दोनों योगफलों के संख्या गुणांकों का अन्तर ज्ञात करलो (चिह्न का ध्यान न रखते हुए)।

यदि धन पदों के योगफल का संख्या गुणांक अधिक है तो अभीष्ट योगफल का चिह्न धन होगा। यदि ऋण पदों के योगफल का संख्या गुणांक अधिक है तो अभीष्ट योगफल का चिह्न ऋण होगा। अभीष्ट योगफल में संख्या गुणांक दोनों योगफलों के संख्या गुणांकों का अन्तर होगा (बिना चिह्न का ध्यान रखे हुए) और योगफल भी वैसा ही सजातीय पद है, जैसे जोड़े जाने वाले पद हैं।

उदाहरण ३. $१२क+(-५क)+(-८क)+७क+३क+(-४क)$
$=(१२क+७क+३क)-(५क+८क+४क)$
$=२२क-१७क=५क$ ।

उदाहरण ४. $३कख+(-१२कख)+५कख+२कख+(-८कख)+(-४कख)$
$=(३कख+५कख+२कख)-(१२कख+८कख+४कख)$
$=१०कख-२४कख=-१४कख$ ।

(v) विजातीय पदों का योगफल

विजातीय पदों के योगफल का अर्थ केवल यही है कि सब पदों को उनके चिह्नों सहित एक स्थान पर लिख दिया जावे।

उदाहरण ५. $२अ+(-३ब)+५स=२अ-३ब+५स$ ।

व्यंजकों (Expressions) का जोड़—जब व्यंजकों का योगफल ज्ञात करना होता है तो उनके सजातीय पदों को ठीक एक-दूसरे के नीचे लिखते हैं और अन्तिम व्यंजक के नीचे एक पड़ी रेखा खींचकर प्रत्येक स्तम्भ (Column) के पदों का योगफल उसके नीचे लिख देते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ६. $३य^{४}-५क^{२}ख+६य^{३}$, $४क^{२}ख+६यर^{२}-५य^{४}$, $१२य^{३}+७यर-८यर^{२}$ का योगफल ज्ञात करो।

क्रिया :

$$\begin{array}{rrrrrr} ३य^{४} & -५क^{२}ख & +६य^{३} & & & \\ -५य^{४} & +४क^{२}ख & & +६यर^{२} & & \\ & & +१२य^{३} & -८यर^{२} & +७यर & \\ \hline -२य^{४} & -क^{२}ख & +१८य^{३} & २यर^{२} & +७यर & \text{उत्तर} \end{array}$$

घटाना अथवा व्यवकलन (Subtraction)

परिभाषा—एक राशि में दूसरी राशि घटाई हुई तब समझी जाती है जबकि एक तीसरी राशि ऐसी मिले कि दूसरी और तीसरी राशियों का योगफल पहली राशि के बराबर हो। जैसे, यदि **य** और **र** का योगफल **ल** है, तो हम कहेंगे कि **ल** में से **य** घटाने पर **र** प्राप्त होगा अर्थात् **ल—य र**।

वह राशि जिसमें से कोई राशि घटाई जाती है **व्यवकल्य** (Minuend) और वह राशि जो घटाई जाती है **व्यवकलित** (Subtrahend) कहलाई जाती है। घटाने के पश्चात् जो राशि बचती है उसे **शेषफल** (Remainder) कहते हैं। जैसे, **ल** में से **य** घटाने पर **र** प्राप्त होता है तो इसमें **ल** को **व्यवकल्य**, **य** को **व्यवकलित** और **र** को **शेषफल** कहते हैं। इस प्रकार घटाने की क्रिया में केवल दो राशियों का ही प्रयोग होता है।

व्यवकल्य — व्यवकलित = शेषफल
(Minuend) — (Subtrahend) = (Remainder)

घटाने के नियम

(i) **सजातीय पदों का घटाना**—(अ) एक पद में दूसरे सजातीय पद को घटाने के लिये पदों के संख्यात्मक गुणांक को ही घटाया जाता है।

(आ) एक पद में से दूसरे सजातीय पद की घटाने के लिये दूसरे पद का चिह्न बदल कर अर्थात् (+) को (−) और (−) को (+) करके पहले पद में जोड़ देते हैं।

इस प्रकार घटाने की क्रिया भी एक प्रकार से जोड़ने की क्रिया ही है। इसलिये जोड़ने की क्रिया की भाँति घटाने की क्रिया में भी केवल सजातीय

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पद ही एक-दूसरे में से घटाये जा सकते हैं और शेष भी वही सजातीय पद होगा तथा शेष में संख्या गुणांक दोनों पदों के संख्या गुणांकों का अन्तर होगा।

उदाहरण ७. १६यर—(+५यर) = १६यर—५यर
= (१६—५)यर = ११यर।

उदाहरण ८. १५क—(—१०क) = १५क+१०क
= (१५+१०)क = २५क।

(ii) **विजातीय पदों का घटाना**—विजातीय पदों को घटाने का अर्थ यही है कि व्यवकलित का चिह्न बदल कर व्यवकल्य और व्यवकलित को चिह्नों सहित एक स्थान पर लिख दिया जावे।

उदाहरण ९. ७य—(+३र) = ७य—३र।

(iii) **एक व्यंजक में से दूसरा व्यंजक घटाना**—जब एक व्यंजक में से दूसरा व्यंजक घटाया जाता है तो **व्यवकलित** को **व्यवकल्य** के नीचे इस प्रकार रखा जाता है कि सजातीय पद एक-दूसरे के नीचे एक ही स्तम्भ में रहें। **व्यवकलित** के नीचे एक पड़ी रेखा खींची जाती है। **व्यवकलित** के प्रत्येक पद के चिह्न बदलकर प्रत्येक स्तम्भ का बीजीय योग रेखा के नीचे दिया जाता है।

उदाहरण १०. ३कख+५यर—६ में से —कख+३यर—२ घटाओ।

क्रिया :

३कख+५यर—६
—कख+३यर—२
+ — +
४कख+२यर—४

सुविधा के लिये बदले हुए चिह्न पहले चिह्नों के नीचे लिख देते हैं।

टिप्पणी : अधिक अभ्यास होने के पश्चात् चिह्नों के बदलने की क्रिया मन ही मन में करली जाती है।

कोष्ठक (Brackets)

कोष्ठक के प्रकार—कोष्ठक तीन प्रकार के होते हैं जिनके नाम निम्नलिखित हैं :—

(१) लघु कोष्ठक ( ), (२) धनु कोष्ठक { } और (३) गुरु कोष्ठक [ ]

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

रेखा कोष्ठक (Vinculum) — ३स — $\overline{\text{ब}+\text{स}}$ में पदों ब और स के ऊपर जो सरल रेखा खींच दी गई है इसको रेखा कोष्ठक कहते हैं।

कोष्ठक के पहले कोई भी चिह्न रखा हो वह चिह्न कोष्ठक में रखे हुए प्रत्येक पद के साथ समझा जाता है।

कोष्ठक हटाने के नियम—(१) यदि कोष्ठक के पहले धन चिह्न (+) लिखा हुआ हो तो कोष्ठक और उससे पहले लिखा हुआ धन चिह्न (+) हटा दो और सब पदों को उनके चिह्न सहित लिखा रहने दो। उदाहरणार्थ

४क + (३ख — ग) = ४क + ३ख — ग

(२) यदि कोष्ठक के पहले ऋण चिह्न (—) लिखा हो तो कोष्ठक और उससे पहले लिखा हुआ ऋण चिह्न (—) हटा दो और कोष्ठक में लिखे हुए पदों को उनके चिह्न बदलकर अर्थात् '+' के स्थान पर '—' और '—' के स्थान पर '+' रखकर लिख दो। उदाहरणार्थ

७क — (३ख — २ग) = ७क — ३ख + २ग

(३) जब किसी प्रश्न में एक कोष्ठक के भीतर दूसरा कोष्ठक तथा दूसरे कोष्ठक के भीतर तीसरा कोष्ठक, इत्यादि कई कोष्ठक रहते हैं; जैसे—

क — [२ख + {३ख — (ग — $\overline{\text{२ग — ख}}$)}]।

तब इस प्रकार के व्यजकों में कोष्ठक हटाते समय सर्वप्रथम रेखा कोष्ठक फिर क्रमशः लघु कोष्ठक, धनु कोष्ठक और गुरु कोष्ठक हटाये जाते हैं। इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि एक समय में केवल एक ही प्रकार का कोष्ठक हटाया जावे।

उदाहरण ११. १०क — [५ख + {१०ग — (५क — $\overline{\text{४ख + ३ग}}$)}] को सरल करो।

क्रिया : १०क — [५ख + {१०ग — (५क — $\overline{\text{४ख + ३ग}}$)}]

= १०क — [५ख + {१०ग — (५क — ४ख — ३ग)}]

= १०क — [५ख + {१०ग — ५क + ४ख + ३ग}]

= १०क — [५ख + १०ग — ५क + ४ख + ३ग]

= १०क — ५ख — १०ग + ५क — ४ख — ३ग

= १०क + ५क — ५ख — ४ख — १०ग — ३ग

= १५क — ९ख — १३ग **उत्तर**

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १२. यदि य=३, र=४, ल=७ तो निम्न का मान बताओ :—

$$५-र+[३य-\{३र-(-४य+\overline{२र-३ल})\}]$$

क्रिया : $५-र+[३य-\{३र-(-४य+\overline{२र-३ल})\}]$

$=५-र+[३य-\{३र-(-४य+२र-३ल)\}]$

$=५-र+[३य-\{३र+४य-२र+३ल)\}]$

$=५-र+[३य-३र-४य+२र-३ल]$

$=५-र+३य-३र-४य-४य+२र-३ल$

$=५-र-३र+२र+३य-४य-३ल$

$=५-४र+२र-य-३ल$

$=५-२र-य-३ल$

$=५-२\times४-३-३\times७$

$=५-८-३-२१=५-३२=-२७$ उत्तर

प्रश्नावली २

सरल करो :—

१. $-यल^{२}+६यल^{२}-२५यल^{२}+३यल^{२}+२यल^{२}$

२. २०कख—१२कख—३कख+५कख—८कख

३. $\frac{२क}{३}+\frac{क}{२}-\frac{३क}{४}-\frac{३क}{२}+\frac{५क}{२}$

निम्नलिखित को जोड़ो :—

४. $५बस^{२}$, $-८बस^{२}$, $३यर^{२}$, $४यर^{३}$, $५क^{२}ख$, $-१०क^{२}ख$

५. ३क—५ख+४स, —२क+७ख+२स और ५क—४ख—३स

६. ६य+४र—३ल, ८य—२र—५ल और—य—५र—४ल

७. एक बाग में $२य^{२}+३य-४$ पेड़ अमरूद के, $३य^{२}-२य+६$ पेड़ आम के तथा $-य^{२}+५य-२$ पेड़ सन्तरों के हैं। बाग में कुल कितने पेड़ हैं ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. एक गाँव में (४य—३र+२) पुरुष, (२य+४र—५) स्त्रियाँ और (—य+१०र+५०) बच्चे हैं। गाँव की जनसंख्या बताओ।

९. मोहन के पास ४क^{२}—५कख+२ख^{२} रुपये, सोहन के पास ४कख+३ख^{२} रुपये तथा रोशन के पास २क^{२}—३कख+ख^{२} रुपये हैं। तीनों के पास कुल कितने रुपये हैं।

घटाओ :—

१०. ५क+७ख—४ब में से २क—३ख+५ब

११. १०कखग+८ब^{२}स—६य में से—५कखग—३ब^{२}स+य

१२. शून्य में से —४यर+२क+५

१३. ८य^{२}र—२पफ+४ से —४य^{२}र+४पफ—५ कितना अधिक है ?

१४. ५कख+३यर से ३कख+यर कितना कम है ?

१५. ४क^{२}—५कख+२ख^{२} में कितना जोड़ें कि योगफल शून्य हो ?

१६. यदि किन्हीं दो व्यजकों का योगफल य^{२}—७यर+४र^{२}—ल^{२} हो और उनमें से एक व्यंजक ४य^{२}—२यर+४र^{२} है तो दूसरे व्यंजक बताओ।

१७. एक बाग में कुल १८य^{२}+२०यरल—६क^{२}ख पेड़ हैं। उनमें से ३य^{२}+५यरल+२क^{२}ख पेड़ आम के, ४य^{२}—६यरल—३क^{२}ख पेड़ अमरूद के और शेष पेड़ जामुन के हैं। बताओ जामुन के कितने पेड़ हैं ?

१८. मोहन के पास २य^{२}+४य+६ रुपये हैं। उनमें से उसने य^{२}—२य+३ रुपये सोहन को दे दिये। बताओं उसके पास कितने रुपये शेष रहे ?

१९. एक नगर की जनसंख्या—८य+१९र+१३ल है। उस नगर में ३य+४र+५ल पुरुष, —४य+७र—ल स्त्रियाँ और शेष बच्चे हैं। बच्चों की संख्या बताओ।

२०. रमेश को अपने पिता से ४क^{२}—५कख+२ख^{२} रुपये और बड़े भाई से ४कख+३ख^{२} रुपये मिले। इनमें से उसने २क^{२}—३कख+ख^{२} रुपये अपनी छोटी बहन को दे दिये। बताओ रमेश के पास कितने रुपये शेष रहे ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. ३क—[२क+{४—५क}]—३

२२. ५प—{२प—५—(३प—२)—४प+५—३}

२३. ख^{५}—[ख^{४}—{३ख^{२}+२ख^{२}—ख+१)}]

२४. २क—{३ख+(ग—२क)—४ग+(२ख—३क+४ग)}

२५. —१—[—११प—{—१७प+(८—९—५प)}]

२६. १—[१—{१—(१—१—१)}]

२७. य—[५र—{य—(३ल—२र)}]+२ल—(४ल—य)

२८. —२प+[—५फ—{—८ब+(—३प—६फ+९ब)}]

यदि य=३, र=४, ल=७ और प=२ तो निम्न का मान बताओ :—

२९. २य—{४र—(—५+६ल)}

३०. ५प+[४—{२प+(३प—४ल)}]

३१. ५यर—[२ल+{—२यर—(३ल—४)}]

३२. —[२यर—{४ल—(—३र+५ल—४र)}]

गुणन (Multiplication)

गुणन (Multiplication)—एक ही संख्या अथवा राशि को बार-बार जोड़ने की सरल रीति को **गुणन** (Multiplication) कहते हैं, जैसे—१२×४ का अर्थ है कि १२ को ४ बार जोड़ना अर्थात् १२×४=१२+१२+१२+१२=४८।

इसी प्रकार क×६ का अर्थ है कि क को ६ बार जोड़ना

∴ क×६=क+क+क+क+क+क=६क

इसी प्रकार क×ख का अर्थ है कि क को ख बार जोड़ना

∴ क×ख=क+ख+क+क+·····ख बार

=क ख।

परिभाषाएं—जिस संख्या अथवा राशि को गुणा करते हैं उसे **गुण्य** (Multiplicand), जिससे गुणा करते हैं उसे **गुणक** (Multiplier) और गुणा करके जो फल आता है उसे **गुणनफल** (Product) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

टिप्पणी १. यदि बीजीय अक्षरों के बीच में कोई प्रक्रिया चिह्न (Sign of operation) नहीं होता तो उनके बीच में गुणा का चिह्न समझा जाता है, जैसे—**कखग** का अर्थ **क × ख × ग** है।

टिप्पणी २. यदि दो कोष्ठकों अथवा किसी पद और कोष्ठक के बीच कोई क्रियात्मक चिह्न नहीं होता तो उनके बीच में गुणा का चिह्न समझा जाता है, जैसे—

(क+ख—ग) (क+ख) का अर्थ **(क+ख—ग) × (क+ख)** का तथा **क (क+ख)** का अर्थ **क × (क+ख)** का है।

क्रमविनिमय नियम (Commutative Law)—यदि हमारे पास **ख** थैलियाँ और प्रत्येक में **क** रुपये हैं, तो सब मिलाकर हमारे पास **क × ख = कख** रुपये होंगे। पुनः मान लिया हम प्रत्येक थैली से एक-एक रुपया लेकर इन **ख** रुपयों का ढेर लगाते हैं। ऐसे ढेरों की संख्या **क** होगी। तब कुल रुपयों की संख्या **ख × क = खक** रुपये होगी।

अतः **कख = खक**

तीन गुणनखण्डों के लिये

कखग = खगक = गकख = गखक

अर्थात् गुणा की राशियाँ किसी भी क्रम में रखी जा सकती हैं। यह गुणा का **क्रम विनिमय नियम** (Commutative Law for Multplication) कहलाता है। इस प्रकार

(३क) × (४ख) × (५ग) = ३ × ४ × ५ × क × ख × ग = ६०कखग

साहचर्य नियम (Associative Law)—यदि हमारे पास **ग** संदूक हों, और प्रत्येक संदूक में **ख** थैलियाँ रुपये रखने के लिये हों, तो

कुल थैलियों की संख्या = **खग**

यदि प्रत्येक थैली में **क** रुपये हों,

तो सब सदूकों में कुल रुपये की संख्या = **क (खग)**

किन्तु प्रत्येक संदूक में रुपयों की संख्या = **कख**

∵ **ग** संदूकों में रुपयों की संख्या = **(कख)ग**

अतः **कखग = क. खग = कख. ग**

इसी प्रकार **(कख) × (गघ) = क × (खग) × घ = क × (खगघ)**

= (कखग) × घ = कखगघ

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात् गुणनफल के खण्डों को किसी भी प्रकार के समूहों में रखा जा सकता है। यह **गुणा का साहचर्य नियम** (Associative Law for Multiplication) कहलाता है।

बंटन नियम अथवा वितरण नियम (Distributive Law)—हम जानते हैं कि

(क+ख). स = (क+ख) + (क+ख) + (क+ख) + ···स बार
= क+क+क+ ···स बार+ख+ख+ख+ ···स बार
= कस+खस जब कि स धनात्मक पूर्णांक है

मान लिया यह स के प्रत्येक मान (भिन्नात्मक अथवा ऋणात्मक) के लिये सही है।

इस प्रकार स के प्रत्येक मान के लिये

(क+ख) स = कस+खस

पुनः (क+ख+ग) स = (प+ग) स जहाँ प = क+ख
= पस+गस
= (क+ख) स+गस
= कस+खस+गस

व्यापक रूप में,

(क+ख+ग+घ+ ···) स = कस+खस+गस+घस+ ···

अर्थात् जब किसी व्यंजक को एक पदी राशि से गुणा करना होता है तब उसके प्रत्येक पद के गुणक को गुणा किया जाता है। इसे **गुणा का बंटन नियम** अथवा **वितरण नियम** (Distributive Law for Multiplication) कहते हैं।

चिह्नों के नियम—

निम्न उदाहरणों पर विचार करो :

(१) क × ख = क+क+क+क+ ·····ख बार
= क ख

(२) —क × ख = (—क) + (—क) + (—क) + ·····ख बार
= —कख

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(३) क × (— ख) = (— ख) × क = (— ख) + (— ख) + (— ख) + ···
···क बार = — खक = — कख ।

(४) (— क) × (— ख) = (— क) + (— क) + (— क) + ····(— ख) बार

हम जानते हैं कि क × (— ख) = — कख

और (— क) × ख = — कख

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि क को (— ख) बार जोड़ने का अर्थ है कि (— क) को ख बार जोड़ो अर्थात् क का चिह्न बदलकर ख बार जोड़ो ।

∴ (— क) × (— ख) = (— क) का चिह्न बदलकर ख बार जोड़ो
= क + क + क + ·····ख बार
= कख ।

अतः क × ख = कख,

(— क) × ख = — कख,

क × (— ख) = — कख और

(— क) × (— ख) = कख

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि

(१) दो समान चिह्न वाली राशियों का गुणनफल धनात्मक और

(२) दो असमान चिह्न वाली राशियों का गुणनफल ऋणात्मक होता है ।

वितत गुणन (Continued Multiplication)—

हम जानते हैं कि ५ × ६ × ७ = २१० ।

इसका अर्थ है कि ५ को पहले ६ से गुणा किया और फिर गुणनफल को ७ से गुणा किया गया ।

इसी प्रकार क × ख × ग = (कख) × ग = कखग

और (— क) × (— ख) × (— ग) = (कख) × (— ग) = — कखग ।

जब तीन अथवा तीन से अधिक राशियों को लगातार गुणा किया जाता है तो इस क्रिया को **वितत गुणन** (Continued Multiplication) और इस गुणनफल को **वितत गुणनफल** (Continued Product) कहते हैं ।

उदाहरण १. — ३य, — ४र, — ५ल और — ६ब का गुणनफल बताओ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$(-३य) \times (-४र) \times (-५ल) \times (-६ब)$

$= -३ \times (-४)\ (-५)\ (-६)$ यरलब

$= ३६०$ यरलब । उत्तर

घातांक सम्बन्धी नियम

(१) $क^{न} \times क^{म} = क^{न+म}$

मान लिया कि $क^{४}$ को $क^{५}$ से गुणा करना है ।

$\therefore\ क^{४} = क \times क \times क \times क$

और $क^{५} = क \times क \times क \times क \times क$

$\therefore\ क^{४} \times क^{५} = क \times क \times क \times क \times क \times क \times क \times क \times क$

$= क^{९} = क^{४+५}$

मान लिया कि $क^{न}$ को $क^{म}$ से गुणा करना है ।

$क^{न} \times क^{म} = (क \times क \times क \times क \times \cdots\cdots$ न खंड तक)

$\times (क \times क \times क \times क \cdots\cdots$ म खंड तक)

$= (क \times क \times क \times क \times क \cdots\cdots$ (म+न) खंडों तक)

$= क^{म+न}$

अतः इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि एक ही राशि के दो घातों का गुणनफल उसी राशि का वह घात है जिसमें घातांक गुण्य और गुणक के घातांकों के योग के बराबर है ।

(२) $(क^{न})^{प} = क^{नप}$

$(क^{न})^{२} = क^{न} \times क^{न} = क^{न+न} = क^{२न}$

और $(क^{न})^{प} = क^{न} \times क^{न} \times क^{न} \cdots\cdots$ प खंडों तक

$= क^{न+न+न+} \cdots\cdots\cdots$ प बार

$= क^{नप}$ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी राशि के घात का घात उस राशि का वह घात होता है जिसका घातांक दोनों घातांकों के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरणार्थ (i) $५य \times ३य^{३} = ५ \times ३ \times य^{१+३} = १५य^{४}$।

(ii) $(३कख^{२})^{५} = ३^{५} (क)^{५} (ख^{२})^{५}$

$= २४३क^{५}ख^{२\times५} = २४३क^{५}ख^{१०}$।

एक व्यंजक को एक पद से गुणा करना—

मान लिया कि य+र को ल से गुणा करना है।

(य+र) × ल = (य+र) + (य+र) + (य+र) + ···ल बार।

= (य+य+य+···ल बार) + (र+र+र+...ल बार)

= यल + रल।

इससे स्पष्ट है कि जब किसी व्यंजक को एक पद से गुणा करना होता है तो अभीष्ट गुणनफल व्यंजक के प्रत्येक पद को उस पद से गुणा करके इन समस्त गुणनफलों को जोड़ने से प्राप्त होता है।

एक व्यंजक को दूसरे व्यंजक से गुणा करना—

मान लिया कि क—ख को क+ग से गुणा करना है।

मान लिया कि क+ग=य।

∴ (क—ख) (क+ग) = (क—ख) य

= कय — खय

= क(क+ग) ख (क+ग), [य का मान रखकर]

= $क^{२}$ + कग — कख — खग

इसी प्रकार, (क+ख—ग) × (क—ख+ग)

= (क+ख—ग) क — (क+ख—ग) ख + (क+ख—ग) ग

= $क^{२}$ + कख — कग — कख — $ख^{२}$ + खग + कग + खग — $ग^{२}$

= $क^{२}$ + कख — कख — कग + कग — $ख^{२}$ + खग + खग — $ग^{२}$

= $क^{२}$ — $ख^{२}$ + २खग — $ग^{२}$

इससे स्पष्ट है कि जब एक व्यंजक को दूसरे व्यंजक से गुणा करना होता है तो एक व्यंजक के प्रत्येक पद को दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा करके इन समस्त गुणनफलों को जोड़ लेते हैं। यह योगफल ही अभीष्ट गुणनफल है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

रीति—(१) पहले गुण्य लिखो और फिर उसके नीचे गुणक लिखो।

(२) गुणक के बायें पद से गुण्य के प्रत्येक पद को गुणा करके क्षैतिज पंक्ति में रखो। यह क्रिया बायें ओर से आरम्भ होनी चाहिये।

(३) फिर गुणक के दूसरे पद से गुण्य के प्रत्येक पद को गुणा करके दूसरी क्षैतिज पक्ति में इस प्रकार रखो कि सजातीय पद एक-दूसरे के नीचे लम्ब रूप रेखा में हों।

(४) इसी प्रकार गुणक के तीसरे, चौथे इत्यादि पदों से गुणा करके रखो।

(५) अब जोड़ लो। इस प्रकार योगफल अभीष्ट गुणनफल है।

उदाहरण २. $य^२+यर+र^२$ को $य^२-यर+र^२$ से गुणा करो।

क्रिया :

$$
\begin{array}{l}
य^२+यर+र^२ \\
य^२-यर+र^२ \\
\hline
य^४+य^३र+य^२र^२ \\
\quad -य^३र-य^२र^२-यर^३ \\
\qquad\qquad +य^२र^२+यर^३+र^४ \\
\hline
य^४+य^२र^२ \qquad\qquad +र^४
\end{array}
$$

उत्तर

प्रश्नावली ३

गुणा करो :—

१. $६य^२र^३ग^{१५}$ को $७यर^{१२}ग^३$ से

२. $-कख^३ग^{१५}$ को $क^२खग^६$ से

सरल करो :—

३. $६क^२ख\ (-२क^२ख^३)\ (-७क^{१२}ख^३)$

४. $(-३अब)\ (४अ^२ब^४)\ (-६अ^२ब^{१२})\ (-२)$

५. $(३य^४)^३$

६. $(कख)^१ + (-क^२ख^३)^५\ (-३क^४ख^२)^४$

७. एक मोटर एक घन्टे में $क^३-३कज्ञ \times ४ग^३$ किलोमीटर चलती है। बताओ वह $३क^२ख^२$ घन्टे में कितनी दूर जावेगी ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. एक कमरे की लम्बाई $२ख^२ - ३कखग + क^२ग^२$ सेमी० और उसकी चौड़ाई ४कग सेमी० है। उस कमरे का क्षेत्रफल बताओ।

गुणा करो :—

९. ५क + ३ख को ५क — ३ख से

१०. २क + ३ख को क + ख से

११. ३य — २र को य — र से

१२. $क^२ - ३क - ५$ को $क^२ - ३क + ७$ से

१३. $क^२ - कख + ख^२$ को $क^२ + कख + ख^२$ से

१४. $य^३ - २य + १$ को $य^३ - ३य + २$ से

१५. $क^३ + क^२ + क + १$ को क — १ से

१६. ५अब — $३अ^२ब + २अब^२$ को २अ — ३अब से

१७. $य^३ + ३य^२र + ३यर^२ + र^३$ को $य^२ + २यर + र^२$ से

१८. $९य^२ + ४र^२ + १ + ३य - २र + ६यर$ को $१ - ३य + २र$ से

१९. $प^२ - पफ - पब + फ^२ - फब + ब^२$ को प + फ + ब से

२०. $क^३ + ३क - ३क^२ - १$ को $क + क^३ - १$ से

२१. $\frac{क^२}{ख^२} + १ + \frac{ख^२}{क^२}$ को $\frac{क}{ख} - \frac{ख}{क}$ से

वितत गुणनफल (Continued Product) ज्ञात करो :—

२२. क - २, क + २, $क^२ + ४$

२३. य + र, य — र, $य^२ + र^२$

२४. २क + ३ख, २क — ३ख, $४क^२ + ९ख^२$

२५. $य^२ - यर + र^२$, $य^२ + यर + र^२$, $य^४ - य^२र^२ + र^४$

सरल करो :—

२६. ३क (क — ख) + ३ख (क + ख)

२७. $३प^२ - ३(प^२ - प) - ४प (प + २)$

२८. $५क \{क^४ - ३क (क^३ - क^२ - क - २)\}$

२९. $६य \{य^५ - २य (य^४ - य^३ + २य^२ - य - २)\}$

३०. $(क^२ - कख + ख^२ + क + ख + १) (क + ख - १)$

३१. $(यर + २) (यर - २) (य^२र^२ + ४)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३२. एक मनुष्य एक घण्टे में २क+३ख किलोमीटर चलता है, तो बताओ वह ३क—ख^{२} घण्टों मे कितने किलोमीटर चलेगा ?

३३. एक आयताकार कमरे की लम्बाई ३य^{२}—४यर+५ मीटर और चौड़ाई य^{२}—३य मीटर है। कमरे का क्षेत्रफल बताओ।

३४. एक मनुष्य एक दिन में क^{२}+२क+३ रुपये कमाता है। बताओ क^{२}—क+४ दिनों में वह मनुष्य कितने रुपये कमावेगा।

३५. एक टोकरे में क^{२}—३क+४ आम हैं। बताओ क^{२}+५क—४ टोकरों में कितने आम होंगे।

भाग अथवा भाजन (Division)

भाग (Division)—किसी एक राशि को दूसरी राशि से भाग देने का अर्थ है कि पहली राशि में से दूसरी राशि कितनी बार घटाई जा सकती है। जैसे, १८÷३ का अर्थ है कि १८ में से ३ कितनी बार घटाया जा सकता है। यदि हम १८ में से ३ प्रत्येक बार घटाते रहें तो यह ६ बार सम्भव होगा।

अतः १८÷३=६ ।

इसी प्रकार १८÷६=३ ।

इससे स्पष्ट है कि १८÷३ का अर्थ यह भी है कि ३ को कौनसी संख्या से गुणा किया जावे कि गुणनफल १८ हो जावे।

इसी प्रकार क÷ख का अर्थ है कि वह कौनसी राशि है जिससे ख को गुणा किया जावे तो गुणनफल क हो जावे।

माना कि वह राशि 'ग' है। इसको निम्न रूप से लिखते हैं।

क÷ख=ग अथवा $\frac{क}{ख}$=ग जिससे प्रकट है कि क=ख×ग।

अतः भाग की क्रिया वास्तव में गुणन की क्रिया का विलोम है क्योंकि क दो गुणनखण्डों ख और ग का गुणनफल दिया हुआ है, इनमें से एक गुणनखंड ख है, हम को दूसरा गुणनखण्ड ग ज्ञात करना है।

परिभाषाएँ—जब एक राशि को दूसरी राशि से भाग करते हैं तो जिस राशि को भाग करते हैं उसे **भाज्य** (Dividend), जिस राशि से भाग करते हैं

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उसे **भाजक** (Divisor) और जो फल भाग करके आता है उसे **भागफल** (Quotient) कहते हैं।

जैसे, क÷ख=ग में क को भाज्य, ख को भाजक तथा ग को भागफल कहते हैं।

अतः **भाज्य = भाजक × भागफल।**

भाग में चिह्नों के नियम :—

$$\because \quad +\text{कख} = (+\text{क}) \times (+\text{ख}),$$

$$\therefore \quad (+\text{कख}) \div (+\text{क}) = \frac{+\text{कख}}{+\text{क}} = +\text{ख};$$

$$\because \quad -\text{कख} = (-\text{क}) \times (+\text{ख})$$

$$\therefore \quad -\text{कख} \div (-\text{क}) = \frac{-\text{कख}}{-\text{क}} = +\text{ख};$$

$$\because \quad +\text{कख} = (-\text{क}) \times (-\text{ख})$$

$$\therefore \quad +\text{कख} \div (-\text{क}) = \frac{+\text{कख}}{-\text{क}} = -\text{ख};$$

$$\because \quad -\text{कख} = (+\text{क}) \times (-\text{ख})$$

$$\therefore \quad -\text{कख} \div (+\text{क}) = \frac{-\text{कख}}{+\text{क}} = -\text{ख};$$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि

(१) जब भाज्य और भाजक के चिह्न समान हों तो भागफल का चिह्न धन (+) होता है।

(२) जब भाज्य और भाजक के चिह्न असमान हों तो भागफल का चिह्न ऋण (—) होता है।

इस प्रकार भाग में चिह्नों के वही नियम हैं जो गुणन में थे।

एक पद को दूसरे पद से भाग करना—

उपर्युक्त उदाहरणों से यह भी स्पष्ट है कि जब एक पद को दूसरे पद से भाग करना हो तो भाज्य के गुणनखण्डों में से वे गुणनखण्ड अलग कर दो जो गुणनखण्ड भाजक में भी हो और शेष गुणनखण्ड भागफल होते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. – १२यरल को —३यर से भाग करो।

क्रिया : (—१२यलर) ÷ (—३यर)

$$= \frac{-१२यलर}{-३यर} = ४ल।$$ उत्तर

घातांक-नियम (Law of Indices)—

$$य^{म} \div य^{न} = य^{म-न}$$

माना कि $क^{६}$ को $क^{४}$ से भाग देना है।

$$क^{६} \div क^{४} = \frac{क^{६}}{क^{४}} = \frac{क \times क \times क \times क \times क \times क}{क \times क \times क \times क}$$

$$= क \times क = क^{२} = क^{६-४}$$

इसी प्रकार $$य^{म} \div य^{न} = \frac{य^{म}}{य^{न}} = \frac{य \times य \times य \times य \cdots म \text{ खंड तक}}{य \times य \times य \times य \cdots न \text{ खंड तक}}$$

$$= य^{म-न}।$$

उन उदाहरणों से स्पष्ट है कि जब किसी राशि के एक घात को उसी राशि के दूसरे घात में भाग देते हैं तो भागफल उस राशि का वह घात होता है, जिसका घातांक भाज्य और भाजक के घातांकों का अन्तर होता है।

टिप्पणी—यदि किसी राशि का घात शून्य हो तो उसका मान १ होता है

$$\because \; य^{०} = य^{क-क} = \frac{य^{क}}{य^{क}} = १$$

एक व्यंजक को एक पद से भाग देना—

$$(४य^{२} - ५य + ६यल) \div य = \frac{४य^{२} - ५य + ३यल}{य}$$

$$= \frac{४य^{२}}{य} - \frac{५यर}{य} + \frac{६यल}{य}$$

$$= ४य - ५र + ६ल।$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः जब एक व्यंजक को एक पद से भाग देना होता है ता भाज्य के प्रत्येक पद को भाजक से भाग देते हैं और इस प्रकार प्राप्त हुए समस्त भागफलों का योगफल ही अभीष्ट भागफल होता है।

व्यंजक को व्यंजक से भाग देना—

जिस प्रकार अंकगणित में लम्बे भाग की रीति से एक संख्या को दूसरी संख्या से भाग देते हैं उसी प्रकार बीजगणित में भी एक व्यंजक को दूसरे व्यंजक से भाग देते हैं।

यह क्रिया निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जावेगी—

मानलो ६७२ को ३२ से भाग देना है।

```
३२) ६७२ (२१
    ६४
    ---
     ३२
     ३२
    ---
     ×
```

परन्तु $३२ = ३ \times १० + २$ और $६७२ = ६ \times १०^{२} + ७ \times १० + २$

∴ उपरोक्त भाग की क्रिया को निम्न प्रकार भी प्रकट किया जा सकता है—

$$
\begin{array}{l}
३ \times १० + २) \; ६ \times १०^{२} + ७ \times १० + २ \; (२ \times १० + १ \\
\qquad\qquad\quad ६ \times १०^{२} + ४ \times १० \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ३ \times १० + २ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ३ \times १० + २ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \times
\end{array}
$$

यदि १० के स्थान पर क रख दें तो उपर्युक्त क्रिया निम्न प्रकार प्रकट की जा सकती है—

$$
\begin{array}{l}
३क + २) \; ६क^{२} + ७क + २ \; (२क + १ \\
\qquad\qquad\quad ६क^{२} + ४क \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ३क + २ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ३क + २ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \times
\end{array}
$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्याख्या—भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दो। जैसे; $६क^२ \div ३क = २क$ । २क अभीष्ट भागफल का पहला पद है। अब २क से भाजक को गुणा करके गुणनफल को भाज्य में से घटाओ। शेष ३क+२ आता है। इस शेष को आगे के लिए भाज्य समझो तथा इसके पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दो। जैसे; $३क \div ३क = १$, अब १ अभीष्ट भागफल का दूसरा पद है। १ से भाजक को गुणा करके गुणनफल को नये भाज्य में से घटाओ। इस प्रकार शेष शून्य आता है।

अतः भाग की क्रिया समाप्त हो गई और अभीष्ट भागफल २क+१ है।

सावधानी—भाजक और भाज्य को किसी अक्षर के **अवरोही क्रम** (Descending order) अथवा **आरोही क्रम** (Ascending order) में रखना चाहिए।

उदाहरण २. $क^३ - ३क^२ + ३क - १$ को क—१ से भाग दो।

$$
\begin{array}{r|l}
 & क^२ - २क + १ \\
\hline
क - १ & क^३ - ३क^२ + ३क - १ \\
 & क^३ - क^२ \\
\hline
 & -२क^२ + ३क - १ \\
 & -२क^२ + २क \\
\hline
 & क - १ \\
 & क - १ \\
\hline
 & \times
\end{array}
$$

अभीष्ट भागफल $= क^२ - २क + १$ उत्तर

उदाहरण ३. $३य^३ + ७य^२ - ६य + ५$ को $य^२ + २य - १$ से भाग दो।

क्रिया :

$$
\begin{array}{r|l}
 & ३य + १ \\
\hline
य^२ + २य - १ & ३य^३ + ७य^२ - ६य + ५ \\
 & ३य^३ + ६य^२ - ३य \\
\hline
 & य^२ - ३य + ५ \\
 & य^२ + २य - १ \\
\hline
 & -५य + ६
\end{array}
$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस उदाहरण में भाज्य को भाजक पूरा-पूरा भाग नहीं दे पाता। इस अवस्था में भाज्य के बचे हुए अंश $(-५य+६)$ को **शेष** कहते हैं।

अतः भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

उदाहरण ४. क का वह मान बताओ जिससे $य^२+१$ से $य^४-३य^२+क$ पूरा-पूरा विभाजित हो जावे।

क्रिया :

$$
\begin{array}{r|l}
 & य^२-४ \\
\hline
य^२+१ & य^४-३य^२+क \\
 & य^४+य^२ \\
\hline
 & -४य^२+क \\
 & -४य^२ \qquad -४ \\
\hline
 & क+४
\end{array}
$$

$य^२+१$ से $य^४-३य^२+क$ पूरा-पूरा विभाजित होने के लिए शेष $क+४$ शून्य के बराबर होना चाहिए।

$\therefore$ $क+४=०$; $\therefore$ $क=-४$

$\therefore$ क का अभीष्ट मान $=-४$। उत्तर

प्रश्नावली ४

भाग करो—

१. $-६३क^५ ख^७ ग^८$ को $१८ क^३ ख^२ ग^५$ से

२. $क^प$ को $क^न$ से

३. $४क^३ ख^३-८क^५ ख^२$ को $४क^२ ख^२$ से

४. $य^२+६य+८$ को $य+४$ से

५. $१२क^२+१३क-५५$ को $३क-५$ से

६. $४क^२-९ख^२$ को $२क-३ख$ से

७. $२क^३+९क^२+१०क+३$ को $२क+१$ से

८. $य^४-८य^३+१७य^२+२य-२४$ को $य-४$ से

९. $१७य-५+२४य^३-२२य^२$ को $१२य-५$ से

१०. $६ख^४-ख^३+४ख^२+५ख-६$ को $३ख^२+ख-२$ से

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

११. $य^3+र^3-1+3यर$ को $य+र-1$ से

१२. $क^4-1$ को $क-1$ से

१३. $क^3+ख^3+ग^3-3कखग$ को $क+ख+ग$ से

१४. $य^3-8र^3-24यर-64$ को $य-2र-4$ से

१५. $य^3+र^3+ल^3+2यर+2रल+2यल$ को $य+र+ल$ से

१६. $क^3-ख^3+ग^3+3कखग$ को $क-ख+ग$ से

१७. $य^4-6य^2र^2+8यर^3-3र^4$ को $2यर-3र^2+य^2$ से

सरल करो—

१८. $\frac{-य^2र^2ल^2-यर^2ल^2+य^2रल^2}{यरल}$

१९. $\frac{य^4-र^4}{य-र}$

२०. $\frac{8क^3+1}{4क^2-2क+1}$

भाग दो और शेष ज्ञात करो :—

२१. $क^2-9क+25$ को $क-4$ से

२२. $क^3+क^2ख-4कख^2+6ख^3$ को $क^2-2कख+ख^2$ से

२३. दो व्यंजकों का गुणनफल $2क^2+5कख+3ख^2$ है। यदि उनमें से एक व्यंजक $क+ख$ हो तो दूसरा व्यंजक बताओ।

२४. $2क^2-3ख^2-कख$ को कितने से गुणा करें कि गुणनफल $2क^4-14क^2ख^2+9क^2ख+9ख^4-12कख^3$ हो जावे।

२५. यदि भाज्य $2य^5+4य^4-3य^3-8य^2-य+2$ और भागफल $2य^3-5य+2$ हो तो भाजक बताओ।

२६. यदि भाजक $4प^2-13प+6$, भागफल $7प^2+5प-3$ और शेष $-39प+27$ हो तो भाज्य बताओ।

२७. यदि भाजक $3क+1$, भागफल $क^2+2क-1$ और शेष $-5क+6$ हो तो भाज्य बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२८. प के किस मान के लिये क − ३ से $क^३ − ३क^२ + ५क − प$ पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है ?

२९. यदि क − ३ से $३क^२ + क + ६प$ पूर्णतया विभाजित हो जाय तो प का मान ज्ञात करो ।

३०. एक गड़रिया $१०य^२ − १४य − १२$ रुपये में २य − ४ बकरियाँ मोल लेता है । एक बकरी के दाम बताओ ।

३१. एक मोटर (३क − २ख) घण्टों में $(३क^३ − ११क^२ख + ९कख^२ − २ख^३)$ किलोमीटर चलती है । उस मोटर की चाल प्रति घण्टा बताओ ।

३२. एक मनुष्य के पास $य^४ + य^२ र^२ + र^४$ रुपये हैं । वह उन रुपयों को $(य^२ − यर + र^२)$ लड़कों में बराबर-बराबर बाँटता है । बताओ प्रत्येक लड़के को कितने-कितने रुपये मिले ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ३

सरल सूत्र और उनके प्रयोग

(SIMPLE FORMULAE AND THEIR APPLICATIONS)

परिभाषा—बीजगणित में सूत्र (Formula) किसी व्यापक फल अथवा बीजीय अक्षरों के उस सम्बन्ध को प्रकट करता है जो उनके प्रत्येक मान के लिये सही उतरता है।

गुणन द्वारा ज्ञात हुआ है कि

$$(\text{क}+\text{ख})^{२}=\text{क}^{२}+२\text{कख}+\text{ख}^{२}।$$

यह एक सूत्र है जो क और ख के प्रत्येक मान के लिये सही है।

बीजगणित में सूत्रों का प्रयोग बहुत व्यापक तथा महत्त्वपूर्ण है क्योंकि सूत्रों की सहायता से कठिन प्रश्न भी सरलता से हल हो जाते हैं। अतः हमें सूत्रों को समझकर उन्हें कंठाग्र कर लेना चाहिये।

सूत्र १. $(\text{क}+\text{ख})^{२}=\text{क}^{२}+२\text{कख}+\text{ख}^{२}$

उपपत्ति : $(\text{क}+\text{ख})^{२}=(\text{क}+\text{ख})\ (\text{क}+\text{ख})$

$$=\text{क}^{२}+\text{कख}+\text{कख}+\text{ख}^{२}$$

अर्थात् दो राशियों के योगफल का वर्ग उनके वर्गों तथा उनके गुणनफल के दुगुने के योगफल के बराबर होता है।

टिप्पणी—$\because\ (\text{क}+\text{ख})^{२}=\text{क}^{२}+\text{ख}^{२}+२\text{कख}$

$$\therefore\ \text{क}^{२}+\text{ख}^{२}=(\text{क}+\text{ख})^{२}-२\text{कख}$$

उदाहरण १. ३य+४ल का वर्ग ज्ञात करो।

$$(३\text{य}+४\text{ल})^{२}=(३\text{य})^{२}+२\times(३\text{य})\times(४\text{ल})+(४\text{ल})^{२}$$

$$=९\text{य}^{२}+२४\text{यल}+१६\text{ल}^{२}।$$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. १०५ का वर्ग सूत्र द्वारा ज्ञात करो।

क्रिया : $(१०५)^२ = (१०० + ५)^२$

$= (१००)^२ + २ \times १०० \times ५ + ५^२$

$= १०००० + १००० + २५$

$= ११०२५$। उत्तर

उदाहरण ३. यदि क+ख=७ और कख=४, तो $क^२ + ख^२$ का मान बताओ।

हम जानते हैं कि

$क^२ + ख^२ = (क + ख)^२ - २कख$

$= ७^२ - २ \times ४ = ४९ - ८ = ४१$।

उदाहरण ४. यदि $क + \frac{१}{क} = ५$ तो $क^२ + \frac{१}{क^२}$ का मान बताओ।

क्रिया : $\because क + \frac{१}{क} = ५ ; \therefore \left(क + \frac{१}{क}\right)^२ = ५^२$

या, $क^२ + २क \times \frac{१}{क} + \frac{१}{क^२} = २५$

या, $क^२ + २ + \frac{१}{क^२} = २५$

या, $क^२ + \frac{१}{क^२} = २५ - २ ; \therefore क^२ + \frac{१}{क^२} = २३$

प्रश्नावली ५

सूत्र की सहायता से निम्न का मान बताओ :—

(१) २य+३र (२) $२क^२ + ३ख^३$ (३) ३कख+४रल

(४) $य + \frac{१}{य}$ (५) १०२ (६) १००२

मान बताओ :—

(७) $क^२ + ख^२$ का, यदि क+ख=८ और कख=३

(८) प+फ का, यदि $प^२ + फ^२ = ९१$ और पफ=१५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(९) $य^२ + \frac{१}{य^२}$ का, यदि $य + \frac{१}{य} = ३$

(१०) $क^२ + \frac{१}{क^२}$ का, यदि $क + \frac{१}{क} = ७$

(११) $क^४ + \frac{१}{क^४}$ का, यदि $क + \frac{१}{क} = ३$

(१२) $य + \frac{१}{य}$ का, यदि $य^२ + \frac{१}{य^२} = १४$

(१३) $क + \frac{१}{क}$ का, यदि $क^२ + \frac{१}{क^२} = ७$

(१४) $य^२ + \frac{१}{य^२}$ का, यदि $य + \frac{१}{य} = म$

सूत्र २. $(क - ख)^२ = क^२ - २कख + ख^२$

उपपत्ति : $(क - ख)^२ = (क - ख)(क - ख)$

$= क^२ - कख - कख + ख^२$

अर्थात् दो राशियों के अन्तर का वर्ग उनके वर्गों के योगफल में से उनके गुणनफल के दुगुने को घटाने पर प्राप्त होता है।

टिप्पणी : $\because$ $क^२ - २कख + ख^२ = (क - ख)^२$

$\therefore$ $क^२ + ख^२ = (क - ख)^२ + २कख$

उदाहरण १. ३य − २र का वर्ग ज्ञात करो।

क्रिया : $(३य - २र)^२ = (३य)^२ - २ \times ३य \times २र + (२र)^२$

$= ९य^२ - १२यर + ४र^२$। उत्तर

उदाहरण २. ९७ का वर्ग सूत्र द्वारा ज्ञात करो।

क्रिया : $(९७)^२ = (१०० - ३)^२$

$= (१००)^२ - २ \times ३ \times १०० + ३^२$

$= १०००० - ६०० + ९ = ९४०९$। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. यदि $क - \frac{१}{क} = ५$, तो $क^२ + \frac{१}{क^२}$ का मान बताओ

क्रिया : $\because$ $क - \frac{१}{क} = ५$; $\therefore$ $\left(क - \frac{१}{क}\right)^२ = ५^२$

या, $क^२ - २ \times क \times \frac{१}{क} + \frac{१}{क^२} = २५$;

या, $क^२ - २ + \frac{१}{क^२} = २५$;

या, $क^२ + \frac{१}{क^२} = २५ + २ = २७$। उत्तर

उपसिद्धान्त १. $(क+ख)^२ = (क-ख)^२ + ४कख$

उपपत्ति : $(क+ख)^२ = क^२ + २कख + ख^२$

$= क^२ - २कख + ख^२ + ४कख$

$= (क-ख)^२ + ४कख$।

दो राशियों के योगफल का वर्ग, उनके अन्तर के वर्ग और उनके गुणनफल के चार गुने के योगफल के बराबर होता है।

उपसिद्धान्त २. $(क-ख)^२ = (क+ख)^२ - ४कख$

उपपत्ति : $(क-ख)^२ = क^२ - २कख + ख^२$

$= क^२ + २कख + ख^२ - ४कख$

$= (क+ख)^२ - ४कख$

दो राशियों के अन्तर का वर्ग, उनके योगफल के वर्ग में से उनके गुणनफल के चार गुने को घटाने पर प्राप्त होता है।

उदाहरण ४. यदि $क - ख = ७$ और $कख = ४४$, तो $क + ख$ का मान बताओ।

क्रिया : $\because$ $(क+ख)^२ = (क-ख)^२ + ४कख$

$\therefore$ $(क+ख)^२ = ७^२ + ४ \times ४४ = ४९ + १७६ = २२५$

$\therefore$ $क + ख = \pm\sqrt{२२५} = \pm १५$। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ५. यदि $य - \frac{१}{य} = ५$ तो $य + \frac{१}{य}$ का मान बताओ।

क्रिया : $\because \left(य + \frac{१}{य}\right)^{२} = \left(य - \frac{१}{य}\right)^{२} + ४य \times \frac{१}{य}$

$\therefore \left(य + \frac{१}{य}\right)^{२} = \left(य - \frac{१}{य}\right)^{२} + ४$

$= ५^{२} + ४ = २५ + ४ = २९$

$\therefore य + \frac{१}{य} = \pm\sqrt{२९}$। उत्तर

प्रश्नावली ६

सूत्र की सहायता से निम्न का वर्ग बताओ :—

१. $य - २र$

२. $१२क - १५ख$

३. $क^{२}ख - कख^{२}$

४. $\frac{क}{ख} - \frac{ख}{क}$

५. $य - \frac{१}{य}$

६. ४९

७. ९९७

मान बताओ :—

८. $य^{२} + र^{२}$ का, यदि $य - र = ३$ और $यर = ४$

९. $य - र$ का, यदि $य^{२} + र^{२} = ३९$ और $यर = ७$

१०. कख का, यदि $क^{२} + ख^{२} = १००$ और $क - ख = ८$

११. $य^{२} + \frac{१}{य^{२}}$ का, यदि $य - \frac{१}{य} = \sqrt{२}$

१२. $य^{४} + \frac{१}{य^{४}}$ का, यदि $य - \frac{१}{य} = ३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. $प - \frac{१}{प}$ का, यदि $प^{२} + \frac{१}{प^{२}} = ६६$

१४. $य - \frac{१}{य}$ का, यदि $य^{२} + \frac{१}{य^{२}} = ३८$

मान बताओ :—

१५. क+ख का, यदि क—ख=७ और कख=४४

१६. क—ख का, यदि क+ख=८ और कख=१५

१७. $य + \frac{१}{य}$ का, यदि $य - \frac{१}{य} = ६$

१८. $प + \frac{१}{प}$ का, यदि $प - \frac{१}{प} = ८$

१९. $य - \frac{१}{य}$ का, यदि $य + \frac{१}{य} = ५$

२०. $क - \frac{१}{क}$ का, यदि $क + \frac{१}{क} = १०$

२१. यदि क+ख=९ और क—ख=७, तो कख का मान बताओ।

२२. यदि क+ख=७ और क—ख=१, तो $क^{२} + ख^{२}$ का मान बताओ।

२३. यदि क+ख=११ और क—ख=५ तो कख और $क^{२} + ख^{२}$ का मान बताओ।

सूत्र ३ : $(क+ख+ग)^{२} = क^{२} + ख^{२} + ग^{२} + २कख + २खग + २कग$

उपपत्ति : $(क+ख+ग)^{२} = \{(क+ख)+ग\}^{२}$

$= (क+ख)^{२} + २ग(क+ख) + ग^{२}$

$= क^{२} + २कख + ख^{२} + २कग + २खग + ग^{२}$

$= क^{२} + ख^{२} + ग^{२} + २कख + २कग + २खग$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसी प्रकार, $(क+ख+ग+घ)^२ = \{(क+ख+ग)+घ\}^२$

$= (क+ख+ग)^२ + २घ(क+ख+ग)+घ^२$

$= क^२+ख^२+ग^२+२कख+२कग+२खग+२कघ+२खघ+२गघ+घ^२$

$\therefore (ख+ख+ग+घ)^२ = क^२+ख^२+ग^२+घ^२+२कख+२कग+२कघ+२खग+२खघ+२गघ$ ।

अतः तीन अथवा तीन से अधिक राशियों के योगफल का वर्ग उनके वर्गों और उन राशियों में से दो-दो के गुणनफल के दुगुने योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण १. २क − ३ख + ग का वर्ग ज्ञात करो ।

क्रिया : $(२क-३ख+ग)^२ = (२क)^२+(-३ख)^२+(ग)^२ +२\times(२क)(-३ख)+२\times २क\times ग+२(-३ख)\times ग$

$= ४क^२+९ख^२+ग^२-१२कख+४कग-६खग$ । उत्तर

उदाहरण २. यदि $क+ख+ग=९$ और $कख+कग+खग=२६$, तो $क^२+ख^२+ग^२$ का मान बताओ ।

क्रिया : $\because (क+ख+ग)^२ = क^२+ख^२+ग^२+२कख+२कख+२खग$

$\therefore (क+ख+ग)^२ = क^२+ख^२+ग^२+२(कख+कग+खग)$ ।

या, $(९)^२ = क^२+ख^२+ग^२+२\times २६$

या, $८१ = क^२+ख^२+ग^२+५२$

$\therefore क^२+ख^२+ग^२ = ८१-५२ = २९$ । उत्तर

प्रश्नावली ७

सूत्र की सहायता से निम्न का वर्ग बताओ :—

१. य + र − ल २. ३क − २ + ४ख

३. य + र − ल − ग ४. ५य + र − ४ल − २ब

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

निम्नलिखित का मान बताओ—

५. $क^२ - ख^२ + ग^२$ का, यदि $क + ख + ग = ६$ और $कख + कग + खग = ११$

६. $कख + कग + खग$ का, यदि $क + ख + ग = ५$ और $क^२ + ख^२ + ग^२ = ९$

७. $यर + रल + यल$ का, यदि $य + र + ल = ७$ और $य^२ + र^२ + ल^२ = १७$

८. $प + फ + ब$ का, यदि $प^२ + फ^२ + ब^२ = ५०$ और $पफ + पब + फब = ४७$

सूत्र ४. $(क + ख)(क - ख) = क^२ - ख^२$

उपपत्ति : $(क + ख)(क - ख) = क(क - ख) + ख(क - ख)$

$= क^२ - कख + कख - ख^२$

$= क^२ - ख^२$

दो राशियों के योगफल और उनके अन्तर का गुणनफल उनके वर्गों के अन्तर के बराबर होता है।

उदाहरण १. २क + ३ख को २क — ३ख से गुणा करो (सूत्र की सहायता से)।

क्रिया : $(२क + ३ख)(२क - ३ख) = (२ख)^२ - (३ख)^२$

$= ४क^२ - ९ख^२$। उत्तर

उदाहरण २. सूत्र की सहायता से ४९६ × ५०४ का मान ज्ञात करो।

क्रिया : $४९६ \times ५०४ = (५०० - ४)(५०० + ४)$

$= (५००)^२ - (४)^२$

$= २५०००० - १६ = २४९९८४$। उत्तर

उदाहरण ३. $(य + र)$, $(य - र)$, $(य^२ + र^२)$ और $(य^४ + र^४)$ का वितत (Continued) गुणनफल ज्ञात करो।

क्रिया : $(य + र)(य - र)(य^२ + र^२)(य^४ + र^४)$

$= (य^२ - र^२)(य^२ + र^२)(य^४ + र^४)$

$= (य^४ - र^४)(य^४ + र^४) = य^८ - र^८$। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ४. क—ख—ग को क—ख+ग से गुणा करो।

क्रिया : (क—ख—ग)(क—ख+ग)

$= \{(\text{क}-\text{ख})-\text{ग}\}\{(\text{क}-\text{ख})+\text{ग}\}$

$= (\text{क}-\text{ख})^{२}-\text{ग}^{२} = \text{क}^{२}-२\text{कख}+\text{ख}^{२}-\text{ग}^{२}$।

उदाहरण ५. यदि क+ख=९ और कख=१८, तो $\text{क}^{२}-\text{ख}^{२}$ का मान बताओ।

क्रिया : $\because$ $(\text{क}-\text{ख})^{२}+(\text{क}+\text{ख})^{२}-४\text{कख}$

या, $(\text{क}-\text{ख})^{२}=(९)^{२}-४\times १८$

$=८१-७२=९$

$\therefore$ क—ख $=\pm\sqrt{९}=\pm ३$

$\because$ $\text{क}^{२}-\text{ख}^{२}=(\text{क}+\text{ख})(\text{क}-\text{ख})$

$\therefore$ $\text{क}^{२}-\text{ख}^{२}=९\times(\pm ३)=\pm २७$। उत्तर

उदाहरण ६. यदि $\text{य}-\frac{१}{\text{य}}=\sqrt{५}$ तो $\text{य}^{२}-\frac{१}{\text{य}^{२}}$ का मान बताओ।

क्रिया : $\left(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}\right)^{२}=\left(\text{य}-\frac{१}{\text{य}}\right)^{२}+४$

$=(\sqrt{५})^{२}+४$

$=५+४=९$

$\therefore$ $\text{य}+\frac{१}{\text{य}}=\pm\sqrt{९}=\pm ३$

$\because$ $\text{य}^{२}-\frac{१}{\text{य}^{२}}=\left(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}\right)\left(\text{य}-\frac{१}{\text{य}}\right)$

$\therefore$ $\text{य}^{२}-\frac{१}{\text{य}^{२}}=\pm ३\times\sqrt{५}=\pm ३\sqrt{५}$। उत्तर

प्रश्नावली ८

निम्नलिखित का मान बताओ—

१. (क+१)(क—१)

२. (२य+३र)(२य—३र)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $(४क-५ख)(४क+५ख)$

४. $(यर+कल)(यर-कल)$

५. $(य^२र^३-कल^३)(य^२र^३+कल^३)$

६. $(४क^२ख+५कख^२)(४क^२ख-५कख^२)$

७. $(क+ख-ग)(क+ख+ग)$

८. $(क^२+कख+ख^२)(क^२-कख+ख^२)$

सूत्र द्वारा निम्न का मान बताओ—

९. १००९ × ९९१

१०. १९८० × २०२०

निम्नलिखित का मान ज्ञात करो—

११. $(क-ख)(क+ख)(क^२+ख^२)(क^४+ख^४)$

१२. $(य-१)(य+१)(य^२+१)(य^४+१)$

१३. $(य+२)(य^२+४)(य-२)(य^४+१६)$

१४. $(२क-३)(४क^२+९)(२क+३)(१६क^४+८१)$

निम्नलिखित का मान बताओ—

१५. $क^२-ख^२$ का यदि $क+ख$ और $कख=६$

१६. $य^२-र^२$ का यदि $य-र=१$ और $यर=२$

१७. $य^२-\frac{१}{य^२}$ का यदि $य-\frac{१}{य}=४$

१८. $क^२-\frac{१}{क^२}$ का यदि $क-\frac{१}{क}=\sqrt{५}$

१९. $प^२-\frac{१}{प^२}$ का यदि $प+\frac{१}{प}=१०$

सूत्र ५. $(क+ख)(क^२-कख+ख^२)=क^३+ख^३$

उपपत्ति : $(क+ख)(क^२-कख+ख^२)$

$$=क(क^२-कख+ख^२)+ख(क^२-कख+ख^२)$$
$$=क^३-क^२ख+कख^२+क^२ख-कख^२+ख^३$$
$$=क^३+ख^३$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सूत्र ६. $(क-ख)(क^2-कख+ख^2)=क^3-ख^3$

उपपत्ति : $(क-ख)(क^2+कख+ख^2)$

$=क(क^2+कख+ख^2)-ख(क^2+कख+ख^2)$

$=क^3+क^2ख+कख^2-क^2ख-कख^2-ख^3$

$=क^3-ख^3$

उदाहरण १. $(२य+३र)(४य^2-६यर+९र^2)$ का मान ज्ञात करो।

क्रिया : $(२य+३र)(४य^2-६यर+९र^2)$

$=(३य+२र)\{(२य)^2-(२य)\times(३र)+(३र)^2\}$

$=(२य)^3+(३र)^3=८य^3+२७र^3$। उत्तर

उदाहरण २. $(३क-२ख)(९क^2+६कख+४ख^2)$ का मान बताओ।

क्रिया : $(३क-२ख)(९क^2+६कख+४ख^2)$

$=(३क-२ख)\{(३क)^2+(३क)\times(२ख)+(२ख)^2\}$

$=(३क)^3-(२ख)^3=२७क^3-८ख^3$। उत्तर

उदाहरण ३. $(२क+७ख)(४क^2-१४कख+४९ख^2)$ का मान बताओ जब कि $क=३$ और $ख=४$।

क्रिया : $(२क+७ख)(४क^2-१४कख+४९ख^2)$

$=(२क+७ख)\{(२क)^2-(२क)\times(७ख)+(७ख)^2\}$

$=(२क)^3+(७ख)^3=८क^3+३४३ख^3$

$=८(३)^3+३४३(४)^3=८\times२७+३४३\times६४$

$=२१६+२१९५२=२२१६८$। उत्तर

प्रश्नावली ९

१. $(य-र)(य^2+यर+र^2)$

२. $(य-१)(य^2+य+१)$

३. $(२क-३ख)(४क^2+६कख+९ख^2)$

४. $(२क-५)(४क^2+१०क+२५)$

५. $(य+र)(य^2-यर+र^2)$

६. $(य+१)(य^2-य+१)$

७. $(२य+७)(४य^2-१४य+४९)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. $(२य + ५ब)(४य^२ - १०यब + २५ब^२)$

मान बताओ—

९. $(२क + ३ग)(४क^२ - ६कग + ९ग^२)$ जबकि $क = ३$ और $ग = २$

१०. $(५य + ४)(२५य^२ - २०य + १६)$ जबकि $य = -१$

११. $(३य + ४र)(९य^२ - १२यर + १६र^२)$ जबकि $य = ५$ और $र = -२$

१२. $(२क - १)(४क^२ + २क + १)$ जबकि $क = ५$

१३. $\left(य - \frac{१}{य}\right)\left(य^२ + १ + \frac{१}{य^२}\right)$ जबकि $य = ५$

सूत्र ७. $(क + ख)^३ = क^३ + ख^३ + ३क^२ख + ३कख^२$

$= क^३ + ख^३ + ३कख(क + ख)$

उपपत्ति : $(क + ख)^३ = (क + ख)(क + ख)(क + ख)$

$= (क^२ + २कख + ख^२)(क + ख)$

$= क(क^२ + २कख + ख^२) + ख(क^२ + २कख + ख^२)$

$= क^३ + २क^२ख + कख^२ + क^२ख + २कख^२ + ख^३$

$= क^३ + ३क^२ख + ३कख^२ + ख^३$

$= क^३ + ख^३ + ३कख(क + ख)$

टिप्पणी : सूत्र ७ से प्रकट है कि

$क^३ + ख^३ = (क + ख)^३ - ३कख(क + ख)$

उदाहरण १. $(२य + ३र)$ का घन (Cube) ज्ञात करो।

क्रिया : $(२य + ३र)^३ = (२य)^३ + ३ \times (२य)^२ \times (३र) + ३(२य)(३र)^२ + (३र)^३$

$= ८य^३ + ३६य^२र + ५४यर^२ + २७र^३$ ।

उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. क+ख+ग का घन ज्ञात करो।

क्रिया : $(क+ख+ग)^३$

$$=\{(क+ख)+ग\}^३$$
$$=(क+ख)^३+३(क+ख)^२ग+३(क+ख)ग^२+ग^३$$
$$=क^३+३क^२ख+३कख^२+ख^३+३ग(क^२+२कख+ख^२)+३कग^२+३खग^२+ग^३$$
$$=क^३+३क^२ख+३कख^२+ख^३+३क^२ग+६क ख ग+३ख^२ग+३कग^२+३खग^२+ग^३$$
$$=क^३+ख^३+ग^३+३क^२ख+३कख^२+३ख^२ग+३खग^२+३ग^२क+३गक^२+६कखग।$$

उत्तर

उदाहरण ३. $क^३+ख^३$ का मान बताओ जबकि क+ख=५ और कख=६।

$$\because\ क^3+ख^3=(क+ख)^3-३कख(क+ख)$$
$$\therefore\ क^3+ख^3=(५)^3-३\times६(५)$$
$$=१२५-९०=३५।$$

उत्तर

उदाहरण ४. $य^3+\frac{१}{य^3}$ का मान बताओ जबकि $य+\frac{१}{य}=\sqrt{३}$।

$$\because\ य^3+\frac{१}{य^3}=\left(य+\frac{१}{य}\right)^3-३य\times\frac{१}{य}\left(य+\frac{१}{य}\right)$$
$$\therefore\ य^3+\frac{१}{य^3}=(\sqrt{३})^3-३(\sqrt{३})$$
$$=३\sqrt{३}-३\sqrt{३}=०।$$

उत्तर

प्रश्नावली १०

निम्न का घन (Cube) बताओ :—

१. २क+१ २. य+३र

३. २य+३र ४. $२य^२+३र^२$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. $प + \frac{१}{प}$

६. $य^{२} + \frac{१}{य^{२}}$

७. $य + २र + ३ल$

८. $२क + ३ख + ४ग$

मान ज्ञात करो :—

९. $क^{३} + ख^{३}$ का, जबकि $क + ख = ७$ और $कख = १२$

१०. $य^{३} + र^{३}$ का, जबकि $य + र = ६$ और $यर = ८$

११. $य^{३} + \frac{१}{य^{३}}$ का, जबकि $य + \frac{१}{य} = ३$

१२. $क^{३} + \frac{१}{क^{३}}$ का, जबकि $क + \frac{१}{क} = \sqrt{३}$

१३. $क^{६} + \frac{१}{क^{६}}$ का, जबकि $क + \frac{१}{क} = २$

१४. $प^{३} + \frac{१}{प^{३}}$ का, जबकि $प - \frac{१}{प} = २$

सूत्र ८. $(क - ख)^{३} = क^{३} - ३क^{२}ख + ३कख^{२} - ख^{३}$

$= क^{३} - ख^{३} - ३कख(क - ख)$

उपपत्ति : $(क - ख)^{३}$

$= (क - ख)(क - ख)(क - ख)$

$= (क - ख)(क^{२} - २कख + ख^{२})$

$= क(क^{२} - २कख + ख^{२}) - ख(क^{२} - २कख + ख^{२})$

$= क^{३} - २क^{२}ख + कख^{२} - क^{२}ख + २कख^{२} - ख^{३}$

$= क^{३} - ३क^{२}ख + ३कख^{२} - ख^{३}$

$= क^{३} - ख^{३} - ३कख(क - ख)$

टिप्पणी : सूत्र ८ से प्रकट है कि

$क^{३} - ख^{३} = (क - ख)^{३} + ३कख(क - ख)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. (२य—३र) का घन (cube) ज्ञात करो।

क्रिया : $(२य-३र)^३ = (२य)^३ - ३(२य)^२ \times ३र + ३(२य)(३र)^२ - (३र)^३$

$= ८य^३ - ३६य^२र + ५४यर^२ - २७र^३$। उत्तर

उदाहरण २. $क^३ - ख^३$ का मान बताओ जबकि क—ख=२ और कख=१५।

क्रिया : $\because क^३ - ख^३ = (क-ख)^३ + ३कख(क-ख)$

$\therefore क^३ - ख^३ = (२)^३ + ३ \times १५(२)$

$= ८ + ९० = ९८$। उत्तर

उदाहरण ३. $य^3 - \frac{१}{य^३}$ का मान बताओ जबकि $य - \frac{१}{य} = ३$।

क्रिया : $\because य^3 - \frac{१}{य^3} = \left(य - \frac{१}{य}\right)^3 + ३य \times \frac{१}{य}\left(य - \frac{१}{य}\right)$

$\therefore य^3 - \frac{१}{य^३} = (३)^3 + ३(३)$

$= २७ + ९ = ३६$। उत्तर

प्रश्नावली ११

निम्न का घन (Cube) बताओ :—

१. य—र

२. २क—५ख

३. $२क^३र - ३र^२$

४. $क - \frac{१}{क}$

५. क—ख—ग

६. २क—३ख+४ग

मान बताओ :—

७. $क^३ - ख^३$ का, जबकि क—ख=५ और कख=१४

८. $८य^३ - २७र^३$ का, जबकि २य—३र=२ और यर=८

९. $क^३ - ख^३ - ३कख$ का, जबकि क—ख=१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. $य^{१} - \frac{१}{य^{३}}$ का, जबकि $य - \frac{१}{य} = ३$

११. $क^{१} - \frac{१}{क^{३}}$ का, जबकि $क - \frac{१}{क} = \sqrt{२}$

१२. $य^{३} - \frac{१}{य^{३}}$ का, जबकि $य - \frac{१}{य} = प$

१३. $य^{९} - \frac{१}{य^{९}}$ का, जबकि $य - \frac{१}{य} = २$

१४. $य^{१} - \frac{१}{य^{३}}$ का, जबकि $य + \frac{१}{य} = ३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ४

गुणनखंडन
(FACTORISATION)

परिभाषा—हम पहले पढ़ चुके हैं कि जब दो अथवा दो से अधिक राशियों का आपस में गुणा किया जाता है तो प्राप्तफल को गुणनफल (Product) कहते हैं और जिन राशियों को आपस में गुणा किया जाता है उनको उस गुणनफल के गुणनखण्ड अथवा खण्ड (Factors) कहते हैं।

जैसे, ७ × ५ = ३५ तो ७ और ५ को ३५ के गुणनखण्ड कहते हैं।

इसी प्रकार, य × (र + ल) = यर + यल, तो य और र + ल, यर + यल के गुणनखंड हैं।

इसी प्रकार ∵ (य + र) (य — र = य² — र²

∴ य² — र² के गुणनखण्ड य + र और य — र हैं।

गुणनखण्ड (Factor)—जब कोई राशि दा अथवा दो से अधिक अन्य राशियों की गुणनफल होती है तो अन्य राशियों में से प्रत्येक राशि पहली राशि की गुणनखंड अथवा खंड (Factor) कहलाती है।

गुणनखण्डन (Factorisation)—किसी व्यंजक को उसके गुणनखंडों के रूप में प्रकट करने की क्रिया को गुणनखंडन (Factorisation) कहते हैं।

एकपदी व्यंजक के गुणनखण्ड—एकपदी व्यंजक का प्रत्येक अवयवी भाग उसका गुणनखंड है। जैसे, कख के गुणनखंड क और ख हैं और ६क³ = २ × ३ × क × क × क।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण—४५क^{3}ख के गुणनखंड ज्ञात करो।

४५क^{3}ख = ३ × ३ × ५ × क × क × क × ख। उत्तर

सार्वगुणनखंड (Common factor)—हम जानते हैं कि

अ(ब + स) = अब + अस।

∴ व्यंजक अब + अस के गुणनखंड अ और ब + स हैं। इनमें से गुणनखंड अ व्यंजक अब + अस के प्रत्येक पद का खंड है। इस लिए खंड अ को व्यंजक अब + अस का सार्वगुणनखंड (Common factor) कहते हैं।

अतः जब कोई पद अथवा व्यंजक किसी व्यंजक के प्रत्येक पद का गुणनखंड होता है तो इस गुणनखंड को उस व्यंजक का सार्वगुणनखंड (Common factor) कहते हैं। जैसे,

∵ व्यंजक अ^{2}ब + अब^2 के प्रत्येक पद का गुणनखंड अब है, इसलिये अ^{2}ब + अब^2 का सार्वगुणनखंड अब है।

पहला प्रकार

कख + कग के गुणनखंड ज्ञात करना—

व्यंजक कख + कग को देखने से ज्ञात होता है कि इस व्यंजक के प्रत्येक पद का गुणनखंड क है, अर्थात् इस व्यंजक का सार्वगुणनखंड क है। इसलिये 'क' दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है। व्यंजक के प्रत्येक पद को क से भाग देने पर भागफल ख + ग प्राप्त होता है। अतः ख + ग व्यंजक का दूसरा गुणनखंड प्राप्त हुआ।

∴ व्यंजक कख + कग के गुणनखंड क और ख + ग हैं अर्थात् कख + कग = क(ख + ग)।

अतः जब किसी व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करना हो तो सर्वप्रथम उसका सार्वगुणनखंड ज्ञात करो तथा फिर सार्वगुणनखंड से उस व्यंजक के प्रत्येक पद को भाग दो। प्राप्त भागफल कोष्ठकों के भीतर रखकर उस सार्वगुणनखंड को कोष्ठकों के पहले रख दो।

टिप्पणी—इन बातों से स्पष्ट है कि गुणनखंडन की क्रिया गुणन की क्रिया से विपरीत है। गुणन की क्रिया में गुणनखंड दिये हुए होते हैं और उनका

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

गुणनफल ज्ञात करना होता है। गुणनखंडन की क्रिया में गुणनफल दिया हुआ होता है और उसके गुणनखड ज्ञात करने होते हैं।

उदाहरण १. $३क^२ख + ९कख^३ + १२क^३ख^२$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो। व्यंजक को देखने से पता चलता है कि इसका सार्वगुणनखण्ड ३कख है।

$$३क^२ख + ९कख^३ + १२क^३ख^२ = ३कख\,(क + ३ख^२ + ४क^२ख)।$$

उदाहरण २. $य^२(र+ल) + यर(र+ल) - र^२(र+ल)$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

निरीक्षण से इसका सार्वगुणनखण्ड (र+ल) है।

$$\therefore\quad य^२(र+ल) + यर(र+ल) - र^२(र+ल)$$
$$= (र+ल)(य^२ + यर - र^२)।$$

उत्तर

प्रश्नावली १२

गुणनखण्ड ज्ञात करो :—

१. यर+रल
२. ३क+३ख+३ग
३. $क^२ख - कख^२$
४. $२य^२र - २यर^२$
५. $क^३ - क^२ख$
६. $३क^४ + २क^३ - क^२$
७. $५य^३र^२ - १०य^२र^४ + १५य^५र^३$
८. $क^२खग + कख^२ग - कखग^२$
९. $२यर^३ल^२ - ३र^२ल^२ + ५य^२र^३$
१०. य(र+ल) − २ब(र+ल)
११. क (ख+ग) − कय(ख+ग) + $य^२$(ख+ग)
१२. २क($य^२$ − र) + ४ख($य^२$ − र) − ८($य^२$ − र)
१३ $क^२$(य+र−ल) + कख(य+र−ल) − कग(य+र−ल)
१४. $(क-ख)^२(य-र) + (क-ख)(य-र)^२$
१५. $६(क-१)^३(य+ल) - ८(क-१)^२(य+ल)^२$
$+ १२(क-१)^२(य+ल)$

दूसरा प्रकार

पदों को उपयुक्त समूहों (Groups) में रखकर गुणनखंड ज्ञात करना :—

मान लिया कि कख + खग + लक + लग के गुणनखण्ड ज्ञात करने हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस व्यंजक के देखने से पता चलता है कि इसमें कोई सार्वगुणनखण्ड (Common factor) नहीं है।

इस व्यंजक पर और ध्यानपूर्वक विचार करने से पता चलता है कि इसके पहले दो पदों कख + खग में सार्वगुणनखण्ड ख और अन्तिम दो पदों लक + लग में सार्वगुणनखण्ड ल है।

∴ कख + खग + लक + लग = ख (क + ग) + ल (क + ग)

दायें पक्ष के दोनों पदों में सार्वगुणनखण्ड क + ग है, इसलिये प्रत्येक पद को क + ग से भाग करके दूसरा गुणनखण्ड ख + ल प्राप्त होता है।

अतः कख + खग + लक + लग = ख(क + ग) + ल(क + ग)

= (क + ग) (ख + ल)।

दिये हुए व्यंजक को निम्न प्रकार भी समूहों में बाँट सकते हैं :—

कख + खग + लक + लग = कख + लक + खग + लग

= क(ख + ल) + ग(ख + ग)

= (ख + ल) (क + ग)

इस प्रकार भी वही दोनों गुणनखण्ड प्राप्त हुए जो पहले मिले थे।

अतः इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड प्राप्त करने के लिए उसके पदों को ऐसे समूहों (Groups) में बाँटना पड़ता है जिनमें कोई पद सार्वगुणनखण्ड हो।

उदाहरण १. $क^2$ + खग + कग + कख के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$क^2$ + खग + कग + कख = $क^2$ + कग + कख + खग

= क(क + ग) + ख(क + ग)

= (क + ग) (क + ख)। उत्तर

उदाहरण २. $४य^2$ + ६रल — ६यर — ४यल के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$४य^2$ + ६रल — ६यर — ४यल

= २($२य^2$ — ३यर + ३रल — २यल)

= २{य(२य — ३र) + ल(३र — २य)}

= २{य(२य — ३र) — ल(२य — ३र)}

= २(२य — ३र) (य — ल)। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. यर(ल^{२} + १) + ल(य^{२} + र^{२}) के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

यर(ल^{२} + १) + ल(य^{२} + र^{२}) = यरल^{२} + यर + य^{२}ल + र^{२}ल

= यरल^{२} + य^{२}ल + र^{२}ल + यर

= यल(रल + य) + र(रल + य)

= (रल + य)(यल + र)। उत्तर

प्रश्नावली १३

गुणनखण्ड ज्ञात करो—

१. ३यर — ६रल — यल + २ल^{२}, २. प^{२} — २पफ + पब — २फब

३. २य^{२} + ३रल — ३यर — २यल, ४. क^{२} — २खग — कख + २कग

५. य^{३} — ३ + य — ३य^{२}, ६. क^{५} + क^{४} + क^{३} + क^{२}

७. क^{३}ख — क^{२}ख^{२} + कख^{३} — ख^{४}

८. २क^{४}ख — ३क^{३}ख^{२} + २क^{२}ख^{३} — ३कख^{४}

९. यर + यल + लब + पव + पय + रब

१०. कय — खय + खर + गर — गय — कर

११. य^{२}र^{२} + (यर^{२} + १) र + य

१२. कख(ग^{२} + १) + ग (क^{२} + ख^{२})

१३. $प^{२} - \left(फ + \frac{१}{फ}\right)प + १$

१४. ४(क + ख)^{२} — २क — २ख, १५. (कख + रल)^{२} + (लक — खर)^{२}

तीसरा प्रकार

क^{२} + २कख + ख^{२} और क^{२} — २कख + ख^{२} के गुणनखण्ड ज्ञात करना :—

हम जानते हैं कि (क + ख)^{२} = क^{२} + २कख + ख^{२}

∴ क^{२} + २कख + ख^{२} के गुणनखंड (क + ख)^{२} अथवा (क + ख) (क + ख) हैं। इसको इस प्रकार भी समझ सकते हैं :—

क^{२} + २कख + ख^{२} = क^{२} + कख + कख + ख^{२}

= क(क + ख) + ख(क + ख)

= (क + ख)(क + ख)

= (क + ख)^{२}

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः जब कोई व्यंजक दो राशियों के वर्गों और उनके गुणनफल के दुगुने के योगफल के रूप में होता है तो वह व्यंजक उन दोनों राशियों के योग के पूण वर्ग के बराबर होता है।

इसी प्रकार हम जानते हैं कि $(क-ख)^२ = क^२ - २कख + ख^२$।

अतः $क^२ - २कख + ख^२$ के गुणनखंड $(क-ख)^२$ अथवा $(क-ख)(क-ख)$ हैं। इसको इस प्रकार भी समझा जा सकता है :—

$$क^२ - २कख + ख^२ = क^२ - कख - कख - कख + ख^२$$
$$= क(क-ख) - ख(क-ख)$$
$$= (क-ख)(क-ख) = (क-ख)^२$$

अतः जब कोई व्यंजक दो राशियों के वर्गों के योगफल और उनके गुणनफल के दुगुने के अन्तर के रूप में होता है तो वह व्यंजक उन दोनों राशियों के अन्तर के पूर्ण वर्ग के बराबर होता है।

उदाहरण १. $१६क^२ + ४०कख + २५ख^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$१६क^२ + ४०कख + २५ख^२ = (४क)^२ + २ \times (४क)(५ख) + (५ख)^२$$
$$= (४क + ५ख)^२।$$ उत्तर

उदाहरण २. $४(२क + ३ख)^२ + १२(२क + ३ख)(२क - ३ख) + ९(२क - ३ख)^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$४(२क + ३ख)^२ + १२(२क + ३ख)(२क - ३ख) + ९(२क - ३ख)^२$$
$$= \{२(२क + ३ख)\}^२ + २ \times \{२(२क + ३ख)\}\{३(२क - ३ख\} + \{३(२क - ३ख)\}^२$$
$$= \{२(२क + ३ख) + ३(२क - ३ख)\}^२$$
$$= (४क + ६ख + ६क - ९ख)^२ = (१०क - ३ख)^२।$$ उत्तर

उदाहरण ३. $४क^२ + ९ख^२ + १६ग^२ + १२कख - २४खग - १६कग$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$४क^२ + ९ख^२ + १६ग^२ + १२कख - २४खग - १६कग$$
$$= ४क^२ + ९ख^२ + १२कख + १६ग^२ + २४खग - १६कग$$
$$= (२क)^२ + (३ख)^२ + २(२क)(३ख) + (४ग)^२ - २४खग - १६कग$$
$$= (२क + ३ख)^२ - २ \times (४ग)(३ख + २क) + (४ग)^२$$
$$= (२क + ३ख - ४ग)^२।$$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रनावली १४

गुणनखंड ज्ञात करो—

१. $४य^२ + २०य + २५$, २. $१६ + ९य^४ + २४य^२$

३. $९क^२ख^२ + ३०कखग + २५ग^२$, ४. $९क^२ - २४क + १६$

५. $१६य^२ + २५र^२ - ४०यर$, ६. $८१य^२र^२ - १४४यरग + ६४ग^२$

७. $४क^२य^२ + १२क^२यज्ञ + ९क^२ज्ञ^२$

८. $क^२ + २ + \frac{१}{क^२}$ ९. $४य^२ - २ + \frac{१}{४य^२}$

१०. $४९(२क + ख)^२ + ८४(२क + ख)(२क - ख) + ३६(२क - ख)^२$

११. $२५(३य + २र)^२ + १६(य + र)^२ - ४०(३य + २र)(य + र)$

१२. $(क^२ + ख^२)^२ + ९ग^४ - ६ग^२(क^२ + ख^२)$

१३. $(य + र + ल)^२ - २(य + र + ल)(य - र - ल) + (य - र - ल)^२$

१४. $य^२ + ४र^२ + ९ल^२ - ४यर - १२रल + ६यल$

१५. $४क^२ + २५ख^२ + १ + २०कख + १०ख + ४क$

चौथा प्रकार

दो वर्गों के अन्तर अर्थात् $क^२ - ख^२$ के गुणनखंड—

हम जानते हैं कि यदि क + ख और क − ख को परस्पर गुणा किया जाता है, तो गुणनफल $क^२ - ख^२$ प्राप्त होता है।

∴ $क^२ - ख^२$ के गुणनखंड क + ख और क − ख हैं।

इसको हम निम्न प्रकार भी समझ सकते हैं—

$$\therefore \quad क^२ - ख^२ = क^२ + कख - कख - ख^२$$
$$= क(क + ख) - ख(क + ख)$$
$$= (क + ख)(क - ख)$$

अतः जब दो वर्गों के अन्तर के गुणनखंड ज्ञात करने होते हैं तो प्रत्येक पद का वर्गमूल ज्ञात करो। एक गुणनखड दोनों वर्गमूलों का योगफल और दूसरा गुणनखंड दोनों वर्गमूलों का अन्तर होगा।

उदाहरण १. $९य^२ - १६र^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$९य^२ - १६र^२ = (३य)^२ - (४र)^२$$
$$= (३य + ४र)(३य - ४र)।$$

उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $७ख^{४} - क^{३}ख^{८}$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

क्रिया : $क^{७}ख^{४} - क^{३}ख^{८} = क^{३}ख^{४}(क^{४} - ख^{४})$

$$= क^{३}ख^{४}\{(क^{२})^{२} - (ख^{२})^{२}\}$$

$$= क^{३}ख^{४}(क^{२} + ख^{२})(क^{२} - ख^{२})$$

$$= क^{३}ख^{४}(क^{२} + ख^{२})(क + ख)(क - ख)$$

टिप्पणी : दिया हुआ व्यंजक दो वर्गों के अन्तर के रूप में नहीं है, परन्तु सार्वगुणनखंड ज्ञात करने के पश्चात् जो दूसरा खंड प्राप्त होता है वह दो वर्गों के अन्तर के रूप में है।

उदाहरण ३. $९(क + ख)^{२} - २५(क - ख)^{२}$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$९(क + ख)^{२} - २५(क - ख)^{२}$$

$$= \{३(क + ख)\}^{२} - \{५(क - ख)\}$$

$$= \{३(क + ख) + ५(क - ख)\}\ \{३(क + ख) - ५(क - ख)\}$$

$$= (३क + ३ख + ५क - ५ख)\ (३क + ३ख - ५क + ५ख)$$

$$= (८क - २ख)(-२क + ८ख)$$

$$= २(४क - ख) \times २(४ख - क)$$

$$= २ \times २(४क - ख)(४ख - क)\ ।$$

उत्तर

उदाहरण ४. $\dfrac{·६५१ \times ·६५१ - ·३४९ \times ·३४९}{·६५१ + ·३४९}$ को सरल करो।

क्रिया : $\dfrac{·६५१ \times ·६५१ - ·३४९ \times ·३४९}{·६५१ + ·३४९}$

$$= \frac{(·६५१)^{२} - (·३४९)^{२}}{·६५१ + ·३४९}$$

$$= \frac{(·६५१ + ·३४९)\ (·६५१ - ·३४९)}{·६५१ + ·३४९}$$

$$= ·६५१ - ·३४९ = ·३०२\ ।$$

उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १५

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $य^२ - र^२$

२. $२५ - य^२$

३. $क^२ - ६४$

४. $क^२ - १$

५. $२५क^२ - १६ख^२$

६. $४क^२ख^२ - ९य^२र^२$

७. $६४य^२र^२ - २५ल^२ब^२$

८. $य^४ - र^४$

९. $क^८ - ख^८$

१०. $१६क^४ - ८१ख^४$

११. $य^१र - यर^१$

१२. $३ - २४३य^४र^४$

१३. $१६रय^१ - ६२५यर^१$

१४. $३२प^५फ - १८पफ^४$

१५. $(क + ख)^२ - १६$

१६. $१०० - (२य + ३र)^२$

१७. $क^२ - (य + १)^२$

१८. $(२य + र)^२ - (य - र)^२$

१९. $९(क - ख)^२ - ४(क + ख)^२$

२०. $य^२(क + ख)^२ - र^२(क - ख)^२$

२१. $(क + ख - ग)^२ - (क - ख + ग)^२$

२२. $(क^२ + ख^२)^२ - (क^२ - ख^२)^२$

२३. $(क - २ख + ३ग)^२ - (क + २ख - ३ग)^२$

सरल करो :—

२४. $(५५५)^२ - (४४५)^२$

२५. $\frac{३४५ \times ३४५ - १५५ \times १५५}{३४५ + १५५}$

२६. $\frac{१·९ \times १·९ - ·१ \times ·१}{१·९ - ·१}$

पाँचवाँ प्रकार

पदों को उपयुक्त समूहों (Suitable Groups) में रखकर व्यंजक को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट करके गुणनखंड ज्ञात करना :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $क^२ + ख^२ - ग^२ - २कख$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

क्रिया : $क^२ + ख^२ - ग^२ - २कख$

$= क^२ + ख^२ - २कख - ग^२$

$= (क - ख)^२ - ग^२ = (क - ख + ग)\ (क - ख - ग)$। उत्तर

उदाहरण २. $१ - ४क^२ + ९ख^२ - २५ग^२ + २०कग - ६ख$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

क्रिया : $१ - ४क^२ + ९ख^२ - २५ग^२ + २०कग - ६ख$

$= १ + ९ख^२ - ६ख - ४क^२ - २५ग^२ + २०कग$

$= (१ - ३ख)^२ - (४क^२ + २५ग^२ - २०कग)$

$= (१ - ३ख)^२ - (२क - ५ग)^२$

$= (१ - ३ख + २क - ५ग)\ (१ - ३ख - २क + ५ग)$

$= (१ + २क - ३ख - ५ग)\ (१ - २क - ३ख + ५ग)$। उत्तर

उदाहरण ३. $९क^२ - ४ख^२ - ग^२ + ४खग + ६क + ४ख - २ग$

क्रिया : $९क^२ - ४क^२ - ग^२ + ४खग + ६क + ४ख - २ग$

$= (३क)^२ - (४ख^२ + ग^२ - ४खग) + ६क + ४ख - २ग$

$= (३क)^२ - (२ख - ग)^२ + २(३क + २ख - ग)$

$= (क३ + २ख - ग)\ (३क - २ख + ग) + २(३क + २ख - ग)$

$= (३क + २ख - ग)\ (३क - २ख + ग + २)$। उत्तर

प्रश्नावली १६

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $य^२ + र^२ + २यर - क^२$

२. $क^४ - क^२ - २क - १$

३. $क^२ - ४कख + ४ख^२ - १$

४. $६४ - ४य^२ - ९र^२ + १२यर$

५. $१०० - ९य^२ - १६र^२ - २४यर$

६. $१६क^२ + २५ख^२ - ग^२ - ४०कख$

७. $४य^२ + ९र^२ - २५क^२ - ३६ख^२ + १२यर - ६०कख$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. $क^२ - ख^२ + ग^२ - १ + २ख - २कग$

९. $(क^२ - ख^२)(य^२ - र^२) - ४कखयर$

१०. $य^२ + २य + २र - र^२$,

११. $य^२ - यर - ल^२ + रल$

१२. $य^२ - २यल - र^२ + २रल$

१३. $९य^२ - ४र^२ - ल^२ + ४रल + ६य + ४र - २ल$

१४. $य^२ - र^२ - ल^२ + २रल + य + र - ल$

१५ $४य^२र^२ - (य^२ + र^२ - ल^२)^२$

दो अथवा तीन पदों वाले व्यंजक का पूर्ण वर्ग के रूप में परिवर्तन।

हम जानते हैं कि

$क^२ + २कख + ख^२ = (क + ख)^२$

और $क^२ - २कख + ख^२ = (क - ख)^२$

इसका अर्थ है कि तीन पदों वाला व्यंजक उस समय पूर्ण वर्ग होता है जब उसमें दो पद पूर्ण वर्ग तथा धन चिह्न (+) के हों और तीसरा पद उन दोनों पदों के वर्गमूलों के गुणनफल का दुगुना हो, चाहे यह पद धन चिह्न (+) का हो, चाहे ऋण चिह्न (−) का।

यदि इन तीनों पदों में से कोई दो पद दिये हुए हों तो वे निम्न प्रकार हो सकते हैं।

$क^२ + ख^२$ अथवा $क^२ \pm २कख$ अथवा $\pm २कख + ख^२$ अर्थात् पूर्ण वर्ग वाले दोनों पद अथवा पूर्ण वर्ग वाला एक पद और गुणनफल वाला पद।

यदि पूर्ण वर्ग वाले दोनों पद अर्थात् व्यंजक $क^२ + ख^२$ दिया हुआ है तो इन दोनों पदों के वर्गमूल लेकर उनके गुणनफल का दुगुना अर्थात् २कख जोड़ने अथवा घटाने से दिया हुआ व्यंजक पूर्ण वर्ग बन जायगा।

यदि पूर्ण वर्ग वाला एक पद और गुणनफल वाला पद अर्थात् व्यंजक $क^२ \pm २कख$ दिया हुआ है तो पूर्ण वर्ग वाले पद अर्थात् $क^२$ का वर्गमूल लेकर उसके दूने अर्थात् २क से २कख को भाग दो और जो भागफल आवे उसके वर्ग, अर्थात् $ख^२$ के जोड़ने पर दिया हुआ व्यंजक पूर्ण वर्ग बन जायगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $४य^२ + ९$ में क्या जोड़ दें या घटा दें कि यह पूर्ण वर्ग बन जावे ?

क्रिया : $४य^२ + ९ = (२य)^२ + ३^२$

पूर्ण वर्ग वाले दोनों पद दिये हुए हैं।

$(२य)^२$ का वर्गमूल $= २य$ और $३^२$ का वर्गमूल $= ३$

∴ अभीष्ट राशि जो जोड़नी अथवा घटानी चाहिये

$= २ \times (२य) \times (३) = १२य$ । **उत्तर**

उदाहरण २. $९क^२ + २४कख$ में क्या जोड़ें कि यह पूर्ण वर्ग बन जाय ?

क्रिया : $९क^२ + २४कख = (३क)^२ + २४कख$

यहाँ पूर्ण वर्ग वाला एक ही पद है।

$(३क)^२$ का वर्गमूल $= ३क$

$३क$ का दूना $= ३क \times २ = ६क$

$$(२४कख) \div (६क) = \frac{२४कख}{६क} = ४ख$$

∴ अभीष्ट संख्या $= (४ख)^२ = १६ख^२$ । **उत्तर**

उदाहरण ३. $य^४ + य^२र^२ + र^४$ में क्या जोड़ें अथवा घटायें कि यह पूर्ण वर्ग बन जावे ?

क्रिया : $य^४ + य^२ र^२ + र^४ = (य^२)^२ + य^२र^२ + (र^२)^२$

$(य^२)^२$ और $(र^२)^२$ से संबन्धित व्यंजक $य^४ + र^४ \pm २य^२र^२$ पूर्ण वर्ग है।

परन्तु दिया हुआ व्यंजक $= य^४ + य^२र^२ + र^४$

∴ यदि दिये हुए व्यंजक में $य^२र^२$ जोड़ दें तो वह $य^४ + २य^२र^२ + र^४$ हो जाता है और यदि दिये हुए व्यंजक में से $३य^२र^२$ घटा दें तो वह $य^४ - २य^२र^२ + र^४$ हो जाता है।

अतः दिया हुआ व्यंजक $य^२र^२$ जोड़ने अथवा $३य^२र^२$ घटाने से पूर्ण वर्ग बनता है। **उत्तर**

प्रश्नावली १७

निम्नलिखित में क्या जोड़ें अथवा घटायें कि वे पूर्ण वर्ग बन जावें—

१. $प^२ + फ^२$ २. $४र^२ + ल^२$

३. $९र^२ + १६ल^२$ ४. $क^४ + ख^४$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

निम्नलिखित में क्या जोड़ें कि वे पूर्ण वर्ग बन जावें—

५. $य^२+२यर$ ६. $क^२-२कख$

७. $९य^२+३०यर$ ८. $४क^२-१२कख$

९. $४य^४+१२य^२र^२$ १०. $९क^४-६क^२ख^२$

निम्नलिखित में रिक्त स्थानों को भरो जिससे वे पूर्ण वर्ग बन जावें—

११. $१६क^२+(\quad\quad)+४ख^२$

१२. $२५य^२र^२-२०यर+(\quad\quad)$

१३. $१६क^२-(\quad\quad)+२५ख^२$

१४. $१६९य^२+१०४यर+(\quad\quad)$

निम्न में क्या जोड़ें अथवा घटायें कि वे पूर्ण वर्ग बन जावें—

१५. $य^२+यर+र^२$ १६ $४क^४+८क^२ख^२+९ख^४$

१७. $९य^४+१५य^२र^२+१६य^४$ १८. $९क^४+८क^२+२५$

१९. $क^२-४क+९$ २०. $य^२+८य+१२$

छठा प्रकार

पूर्ण वर्ग बनाकर व्यंजक को वर्गों के अन्तर के रूप में रखकर गुणनखंड ज्ञात करना—

उदाहरण १. $य^२+१०य+२४$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$
\begin{aligned}
& य^२+१०य+२४ \\
&=य^२+१०य+५^२-५^२+२४ \\
&=(य+५)^२-२५+२४ \\
&=(य+५)^२-१ \\
&=(य+५+१)\ (य+५-१) \\
&=(य+६)\ (य+४)। \qquad \text{उत्तर}
\end{aligned}
$$

व्याख्या—सर्वप्रथम $य^२+१०य$ में $(५)^२$ जोड़कर पूर्ण वर्ग बना लिया। व्यंजक का मान वही रखने के लिये $(५)^२$ घटा दिया। सरल करने पर व्यंजक दो वर्गों के अन्तर के रूप में आ जाता है।

उदाहरण २. $य^४+य^२र^२+र^४$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$
\begin{aligned}
& य^४+य^२र^२+र^४ \\
&=(य^२)^२+(र^२)^२+२(य^२)(र^२)-२य^२र^२+य^२र^२
\end{aligned}
$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= (य^2 + र^2)^2 - य^2र^2$$
$$= (य^2 + र^2)^2 - (यर)^2$$
$$= (य^2 + र^2 + यर)\ (य^2 + र^2 - यर)$$
$$= (य^2 + यर + र^2)\ (य^2 - यर + र^2)।$$ उत्तर

व्याख्या : $य^4 + र^4$ में $२य^2र^2$ जोड़कर पूर्ण वर्ग बना लिया। व्यंजक का मान वही रखने के लिए $२य^2र^2$ घटा दिया। सरल करने पर व्यंजक दो वर्गों के अन्तर के रूप में आ जाता है।

यदि $य^4 + र^4$ में $२य^2र^2$ घटाकर पूर्ण वर्ग बनाते हैं तो सरल करने पर व्यजक दो वर्गों के अन्तर के रूप में नहीं आता। इस कारण इस दशा में घटाकर पूर्ण वर्ग नहीं बनाते।

उदाहरण ३. $क^4 + ४ख^4$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$क^4 + ४ख^4 = (क^2)^2 + (२ख^2)^2 + २(क^2)\ (२ख^2) - ४क^2ख^2$$
$$= (क^2 + २ख^2)^2 - (२कख)^2$$
$$= (क^2 + २ख^2 + २कख)\ (क^2 + २ख^2 - २कख)।$$ उत्तर

प्रश्नावली १८

पूर्ण वर्ग बनाकर व्यंजकों को दो वर्गों के अन्तर के रूप में रखकर गुणनखंड निकालो :—

१. $य^2 + ८य + १५$
२. $य^2 + १८य + ७२$
३. $य^2 - ६य + ८$
४. $य^2 - १४य + ४५$
५. $य^2 - १०य - ११$
६. $य^2 - ६य - १६$
७. $क^4 + क^2ख^2 + ख^4$
८. $क^4 + ३क^2ख^2 + ४ख^4$
९. $४य^4 - २१य^2र^2 + र^4$
१०. $य^4 - १९य^2र^2 + ९र^4$
११. $४९य^4 - ४४य^2र^2 + ४र^4$
१२. $९क^4 - ३४क^2ख^2 + २५ख^4$
१३. $९क^4 - ७६क^2 + ४$
१४. $२५क^4 - ५९क^2 + १$
१५. $य^4 - ४१य^2 + १६$
१६. $९य^4 - य^2र^2 + १६र^4$
१७. $य^4 + ४$
१८. $य^4 + ८१$
१९. $य^4 + ६४$
२०. $८१य^4 + ६४र^4$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. $य^{८} + ४र^{४}$ २२. $६२५क^{४} + ४ख^{४}$

२३. $४क^{४}ख^{२} + ८१ख^{२}$ २४. $य^{५} + ३२४य$

सातवाँ प्रकार

$य^{२} + कय + ख$ के रूप के व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करना—

हम जानते हैं कि

१. $(य + क)(य + ख) = य^{२} + (क + ख)य + कख$

२. $(य - क)(य - ख) = य^{२} - (क + ख)य + कख$

३. $(य + क)(य \quad ख) = य^{२} + (क - ख)य - कख$

४. $(य - क)(य + ख) = य^{२} - (क - ख)य - कख$

उपर्युक्त उदाहरणों से ज्ञात होता है कि

(१) गुणनफल का प्रथम पद द्विपदी व्यंजकों के प्रथम पदों का गुणनफल होता है।

(२) गुणनफल का दूसरा पद द्विपदी व्यंजकों के दूसरे पदों के बीजीय (Algebraic) योगफल तथा य (चर राशि) का गुणनफल होता है।

(३) गुणनफल का तीसरा पद द्विपदी व्यंजकों के दूसरे (अचर) पदों का गुणनफल होता है।

(४) यदि गुणनफल के तीसरे पद का चिह्न धन (+) हो तो द्विपदी व्यंजकों के दूसरे पदों का चिह्न एक सा होगा, अर्थात् यदि गुणनफल के दूसरे पद का चिह्न धन (+) है तो द्विपदी व्यंजकों के दूसरे पदों का चिह्न धन (+) होगा और यदि गुणनफल के दूसरे पद का चिह्न ऋण (−) है तो द्विपदी व्यंजकों के दूसरे पदों का चिह्न ऋण (−) होगा।

(५) यदि गुणनफल के तीसरे पद का चिह्न ऋण (−) है तो द्विपदी व्यंजकों में से एक व्यंजक के दूसरे पद का चिह्न धन (+) और दूसरे व्यंजक के दूसरे पद का चिह्न ऋण होगा।

अतः व्यंजक $य^{२} + कय + ख$ के रूप के गुणनखंड ज्ञात करने के लिये निम्न रीति प्रयोग में लानी चाहिये—

(क) सर्वप्रथम व्यंजक के तीसरे पद का चिह्न देखो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) यदि तीसरे पद का चिह्न धन (+) है तो तीसरे पद अथवा उसके संख्यात्मक गुणांक के ऐसे दो गुणनखंड ज्ञात करने चाहिए जिनका योग दूसरे पद का गुणांक हो। उन खंडों का चिह्न दूसरे पद के चिह्न के समान होगा। फिर व्यंजक को इस प्रकार लिखो जिसमें उसका दूसरा पद खंडों के योग के रूप में हो।

(ग) यदि तीसरे पद का चिह्न ऋण (−) है तो तीसरे पद अथवा उसके संख्यात्मक गुणांक के ऐसे दो गुणनखंड करने चाहिए जिनका अन्तर दूसरे पद का गुणांक हो। बड़े गुणनखड का चिह्न वह चिह्न होगा जो दूसरे पद का है। फिर व्यंजक को इस प्रकार लिखो जिसमें उसका दूसरा पद खंडों के अन्तर के रूप में हो।

उदाहरण १. $य^२+१२य+३५$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

टिप्पणी : तीसरे पद का चिह्न धन (+) है, इसलिये ३५ के ऐसे दो गुणनखंड ज्ञात करने हैं जिनका योग १२ हो। स्पष्ट है कि ये खंड ७ और ५ हैं। चूँकि दूसरे पद का चिह्न धन (+) है, इसलिये ७ और ५ के चिह्न भी धन हैं। अब १२य को ७य+५य के रूप में लाकर व्यंजक को लिखना चाहिये।

$$य^२+१२य+३५=य^२+७य+५य+३५$$
$$=य(य+७)+५(य+७)$$
$$=(य+७)(य+५)।$$ उत्तर

उदाहरण २. $य^२-१०य+२४$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$य^२-१०य+२४=य^२-६य-४य+२४$$
$$=य(य-६)-४(य-६)$$
$$=(य-६)(य-४)।$$ उत्तर

उदाहरण ३. $य^२+१२य-६४$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

टिप्पणी : ∵ तीसरे पद का चिह्न ऋण है, इसलिये ६४ के ऐसे दो गुणनखंड ज्ञात करने हैं जिनका अन्तर १२ हो। स्पष्ट है कि ये खंड १६ और ४ हैं। अब १२य को १६य−४य के रूप में लाकर व्यंजक को लिखना चाहिये।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$य^२+१२य-६४=य^२+१६य-४य-६४$$
$$=य\,(य+१६)-४\,(य+१६)$$
$$=(य+१६)\,(य-४)$$ उत्तर

उदाहरण ४. $य^२-५य-३६$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$य^२-५य-३६=य^२-९य+४य-३६$$
$$=य\,(य-९)+४\,(य-९)$$
$$=(य-९)\,(य+४)$$ उत्तर

टिप्पणी—द्विघातीय त्रिपदी व्यंजक के गुणनखंड दो रीतियों से ज्ञात कर सकते हैं—(१) उपर्युक्त रीति तथा (२) पूर्ण वर्ग बना कर। पहले उपर्युक्त रीति का उपयोग करो। यदि इस रीति से नहीं ज्ञात होते तो पूर्ण वर्ग की रीति का प्रयोग करो।

प्रश्नावली १९

गुणनखंडों में विभक्त करो—

१. $य^२+५य+६$ २. $य^२+१५य+५६$

३. $य^२+१८य+८०$ ४. $य^२+१३य+४०$

५. $य^२-८य+१२$ ६. $य^२-११य+१०$

७. $य^२-१५य+५०$ ८. $य^२+५य-१४$

९. $य^२+८य-३३$ १०. $य^२+७य-३०$

११. $य^२-५य-२४$ १२. $य^२-१२य-१३$

१३. $क^२+१०कख-७५ख^२$ १४. $क^२-४कख-६०ख^२$

१५. $य^२-३यरल-२८र^२ल^२$ १६. $१४+५य-य^२$

१७. $२०+य-य^२$ १८. $१६-६य-य^२$

१९. $क^२-कख+४६२ख^२$ २०. $क^२+२कख-२५५ख^२$

२१. $य^२-(क+ख)\,य+कख$ २२. $य^२-\left(क+\frac{१}{क}\right)य+१$

आठवाँ प्रकार

$कय^२+खय+ग$ के रूप के व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करना—

हम जानते हैं कि

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) $(२य+३)(३य+५)=६य^२+१९य+१५$
(२) $(२य-३)(३य-५)=६य^२-१९य+१५$
(३) $(२य+३)(३य-५)=६य^२य-य-१५$
(४) $(२य-३)(३य+५)=६य^२+य-१५$

(१) और (२) से प्रकट है कि गुणनफल के जब तीसरे पद का चिह्न धन (+) है तो उसमें य का गुणांक ऐसी दो संख्याओं का योगफल है जिनका गुणनफल $य^२$ के गुणांक और तीसरे पद के संख्यात्मक गुणांक के गुणनफल के बराबर है।

(३) और (४) से प्रकट है कि जब गुणनफल के तीसरे पद का चिह्न ऋण (—) है तो उसमें य का गुणांक ऐसी दो संख्याओं का अन्तर है जिनका गुणनफल $य^२$ के गुणांक और तीसरे पद के संख्यात्मक गुणांक के गुणनफल के बराबर है।

अतः ऐसे व्यंजकों के गुणनखंड निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

(१) $य^२$ के गुणांक और तीसरे पद के संख्यात्मक गुणांक को गुणा करो।

(२) जब तीसरे पद का चिह्न धन (+) हो तो इस गुणनफल के ऐसे दो गुणनखंड ज्ञात करो जिनका योग य के गुणांक के बराबर हो।

(३) जब तीसरे पद का चिह्न ऋण (—) हो तो इस गुणनफल के ऐसे दो गुणनखंड ज्ञात करो जिनका अन्तर य के गुणांक के बराबर हो।

(४) फिर सातवें प्रकार की भाँति गुणनखंड ज्ञात कर लो।

उदाहरण १. $३य^२+८य+४$ गुणनखंड ज्ञात करो।

टिप्पणी : ३ और ४ को गुणा करो। गुणनफल १२ के दो ऐसे गुणनखंड करो जिनका योग ८ हो। स्पष्ट है कि ऐसे गुणनखंड ६ और २ हैं।

$$\therefore\ ३य^२+८य+४=३य^२+६य+२य+४$$
$$=३य(य+२)+२(य+२)$$
$$=(य+२)(३य+२)$$ उत्तर

उदाहरण २. $६य^२+५यर-४र^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$६य^२+५यर-४र^२=६य^२+८यर-३यर-४र^२$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= २य(३य+४र)-र(३य+४र)$

$= (३य+४र)(२य-र)$ उत्तर

प्रश्नावली २०

गुणनखंड ज्ञात करो—

१. $३य^२+१०य+८$

२. $५य^२+१६य+१२$

३. $८य^२-३०य+७$

४. $२८य^२-४१य+१५$

५. $२०य^२-४३य+२१$

६. $५य^२+२८य-१२$

७. $१८य^२+५३य-३५$

८. $६य^२+७य-२०$

९. $१३य^२-य-६$

१०. $१५क^२-६क-९$

११. $२५-१०क-८क^२$

१२. $३-१४क-५क^२$

१३. $४-क-३क^२$

१४. $८+य-७य^२$

१५. $३०य^२+९७यर-२८र^२$

१६. $य^२+य(क-ख)-कख$

१७. $य^२-य\left(क+\frac{१}{क}\right)+१$

१८. $य^२+य\left(ख+\frac{१}{ख}\right)+१$

१९. $य^२+य\left(क-\frac{१}{क}\right)-१$

२०. $य^२-य\left(ख-\frac{१}{ख}\right)-१$

$य^२+कय+ख$ अथवा $कय^२+खय+ग$ के रूप में परिवर्तित करके गुणनखंड—

उदाहरण १. $५य^४-४य^२-१२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$५य^४-४य^२-१२=५(य^२)^२-४य^२-१२$

$=५(य^२)^२-१०य^२+६य^२-१२$

$=५य^२(य^२-२)+६(य^२-२)$

$=(य^२-२)(५य^२+६)$

उत्तर

उदाहरण २. $८(य+१)^२+२(य+१)(र+२)-१५(र+२)^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$य+१=क$ और $र+२=ख$ रखने पर,

व्यंजक $=८क^२+२कख-१५ख^२$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= ८क^२ + १२कख - १०कख - १५ख^२$

$= ४क\ (२क + ३ख) - ५ख\ (२क + ३ख)$

$= (२क + ३ख)\ (४क - ५ख)$

$= \{२(य + १) + ३(र + २)\}\ \{४(य + १) - ५\ (र + २)\}$,

क = य + १ और ख = र + २ रख कर,

$= (२य + २ + ३र + ६)\ (४य + ४ - ५र - १०)$

$= (२य + ३र + ८)\ (४य - ५र - ६)$ उत्तर

उदाहरण ३. $४य^२ - ४यर + र^२ + १४यर - ७र - ३०$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$४य^२ - ४यर + र^२ + १४य - ७र - ३०$

$= (४य^२ - ४यर + र^२) + (१४य - ७र) - ३०$

$= (२य - र)^२ + ७\ (२य - र) - ३०$

$= क^२ + ७क - ३०$, जहाँ क = २य − र

$= क^२ + १०क - ३क - ३०$

$= क(क + १०) - ३\ (क + १०)$

$= (क + १०)\ (क - ३)$

व्यंजक $= (२य - र + १०)\ (२य - र - ३)$, क का मान रखने पर।

उदाहरण ४. $य^२ + खय - (क^२ - ३कख + २ख^२)$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

∴ व्यंजक $= य^२ + खय - (क - २ख)\ (क - ख)$

$= य^२ + (क - ख)य - (क - २ख)य - (क - २ख)\ (क - ख)$

$= य\ (य + क - ख) - (क - २ख)\ (य + क - ख)$

$= (य + क - ख)\ (य - क + २ख)$ उत्तर

प्रश्नावली २१

गुणनखण्ड ज्ञात करो :-

१. $य^४ - १७य^२ + ७२$ २. $य^४ - ५य^२ - १७६$

३. $३०य^४ - य^२ र^२ - ४२र^४$ ४. $३०य^४ + ९७य^२र^२ - २८र^४$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. $१८य^{६}+५३य^{३}+३५$ ६. $य^{६}-१०य^{३}र^{३}+२४र^{६}$

७. $य^{८}-१३य^{४}+४०$ ८. $८य^{८}-१४य^{४}+३$

९. $६(क+२ख)^{२}-११(क+२ख)-३५$

१०. $(य+२र)^{२}-२(य+२र)(य-र)-१५(य-र)^{२}$

११. $८(क+१)^{२}+२(क+१)(ख+२)-१५(ख+२)^{२}$

१२, $य^{२}-२य र+र^{२}+३य-३र++२$

१३. $य^{२}+४र^{२}+४र-४यर-२य-८$

१४. $य^{२}+\frac{१}{य^{२}}+२\left(य-\frac{१}{य}\right)-५$

१५. $य^{२}+\frac{१}{य^{२}}-७\left(य+\frac{१}{य}\right)+१४$

१६. $क^{२}+३ख^{२}-४ग^{२}-४कख+४खग$

१७. $य^{२}+य-र(र-१)$

१८. $य^{२}-४लय-(र^{२}+६रल+५ल^{२})$

१९. $य^{२}+लय-(र^{२}-३रल+२ल^{२})$

२०. $६(य+र)^{२}+४८यर(य+र)-७य^{२}र^{२}$

२१. $य^{२}+२कय+क^{२}-ख^{२}$

नवाँ प्रकार

$य^{३}+र^{३}$ के रूप के व्यंजक के गुणनखण्ड करना

$\because\ (य+र)^{३}=य^{३}+र^{३}+३यर(य+र)$

$\therefore\ य^{३}+र^{३}=(य+र)^{३}-३यर(य+र)$

$=(य+र)\ \{(य+र)^{२}-३यर\}$

$=(य+र)\ (य^{२}+र^{२}+२यर-३यर)$

$=(य+र)\ (य^{२}+र^{२}-यर)$

अतः दो राशियों के घनों के योगफल के रूप में रखे हुए व्यंजक का एक गुणनखंड दोनों राशिय का योगफल और दूसरा गुणनखंड उन राशियों के वर्गों के योगफल में से उन राशियों के गुणनफल के घटाने पर प्राप्त होता ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. २७य^3+८र^3 के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$२७य^३+८र^३=(३य)^३+(२र)^३$$
$$=(३य+२र)\ \{(३य)^२+(२र)^२-३य\times २र\}$$
$$=(३य+२र)\ (९य^२+४र^२-६यर)$$ उत्तर

उदाहरण २. (य+२र)^3+(य−२र)^3 के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$(य+२र)^३+(य-र)^३$$
$$=(य+२र+य-२र)\ \{(य+२र)^२+(य-२र)^२-(य+२र)(य-२र)\}$$
$$=२य(य^२+४र^२+४यर+य^२+४र^२-४यर-य^२+४र^२)$$
$$=२य\ (य^२+१२र^२)$$

प्रश्नावली २२

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. ८य^3+२७ २. १२५य^3+८र^3

३. ६४य^3+१ ४. २७य^3+६४र^3

५. (य+१)^3+१ ६. (य−र)^3+र^3

७. (२य+३र)^3+(२य−१)^3

८. (य+२)+(य−१)^3

९. $\frac{य^3}{र^3}+\frac{र^3}{य^3}$ १०. $य^3+\frac{१}{य^3}$

११. ८(क+ख)^3+२७(क−ख)^3

१२. ६४(२य+१)^3+१२५(१−य)^3

१३. य^6+र^6 १४. य^9+र^9

१५. २५०क^{4}ख+५४कख^4 १६. ८य^{3}र+२७र^4

दसवाँ प्रकार

य^3−र^3 के रूप के व्यंजक के गुणनखण्ड करना :—

$$\because\ (य-र)^3=य^3-र^3-३यर(य-र)$$
$$\therefore\ य^3-र^3=(य-र)^3+३यर(य-र)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=(य-र)\ \{(य-र)^2+३यर\}$$
$$=(य-र)\ (य^2+र^2-२यर+३यर)$$
$$=(य-र)\ (य^2+र^2+यर)$$

अतः दो राशियों के घनों के अन्तर के रूप में रखे हुए व्यंजक का एक गुणनखण्ड दोनों राशियों का अन्तर और दूसरा गुणनखण्ड उन राशियों के वर्गों तथा उन राशियों के गुणनफल के योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण १. $८य^3-२७र^3$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$$८य^3-२७र^3=(२य)^3-(३र)^3$$
$$=(२य-३र)\ \{(२य)^2+(३र)^2+२य\times ३र\}$$
$$=(२य-३र)\ (४य^2+९र^2+६यर)$$ उत्तर

उदाहरण २. $य^6-र^6$ के गुणनखड ज्ञात करो।

टिप्पणी : जब कोई व्यंजक एक ही साथ दो राशियों के वर्गों का अन्तर तथा घनों का अन्तर होता है, तो उसे वर्गों के अन्तर के रूप में रखकर प्रश्न हल करने में सुविधा रहती है।

$$य^6-र^6=(य^3)^2-(र^3)^2$$
$$=(य^3+र^3)\ (य^3-र^3)$$
$$=(य+र)\ (य^2+र^2-यर)\ (य-र)\ (य^2+र^2+यर)$$ उत्तर

उदाहरण ३. $य^3-८र^3+य-२र$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$य^3-८र^3+य-२र$$
$$=य^3-(२र)^3+य-२र$$
$$=(य-२र)\ (य^2+४र^2+२यर)+(य-२र)$$
$$=(य-२र)\ (य^2+४र^2+२यर+१)$$ उत्तर

प्रश्नावली २३

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $८य^3-र^3$

२. $य^3-८$

३. $य^3-१$

४. $२७य^3-८र^3$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. $१२५क^{३}-६४ख^{३}$

६. $१०००-८ख^{३}$

७. $१६य^{३}-२र^{३}$

८. $य^{७}र^{२}-यर^{८}$

९. $य^{९}-र^{९}$

१०. $य^{१२}-र^{१२}$

११. $य^{३}-\frac{१}{य^{३}}$

१२. $\frac{क^{३}}{ख^{३}}-\frac{ख^{३}}{क^{३}}$

१३. $(य-१)^{३}-१$

१४. $६४-(य-४)^{३}$

१५. $(क-ख)^{३}-(क+ख)^{३}$

१६. $२७(य-र)^{३}-६४(य+र)^{३}$

१७. $य^{३}-८र^{३}-२(य-२र)$

१८. $य^{३}-३(य-३)-२७$

१९. $य^{३}-८+६य^{२}-१२य$

पदों को अनुकूल क्रम में रखकर गुणनखण्ड ज्ञात करना—

बहुत से व्यंजक ऐसे हैं जो सीधे ही किसी भी सूत्र के रूप में नहीं रखे रहते परन्तु उसके पदों को उचित क्रम देने पर उपर्युक्त रूपों में से किसी-न-किसी रूप में आ जाते हैं जिससे उनके गुणनखण्ड किये जा सकते हैं।

उदाहरण १. $य^{२}+२यर+र^{२}+३य+३र$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$य^{२}+२यर+र^{२}+३य+३र$$
$$=(य^{२}+२यर+र^{२})+(३य+३र)$$
$$=(य+र)^{२}+३(य+र)$$
$$=(य+र)(य+र+३)$$ उत्तर

उदाहरण २. $क^{२}+ख^{२}-ग^{२}+२कख+क+ख-ग$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

$$क^{२}+ख^{२}-ग^{२}+२कख+क+ख-ग$$
$$=क^{२}+ख^{२}+२कख-ग^{२}+क+ख-ग$$
$$=(क+ख)^{२}-ग^{२}+क+ख-ग$$
$$=(क+ख+ग)(क+ख-ग)+(क+ख-ग)$$
$$=(क+ख-ग)(क+ख+ग+१)$$ उत्तर

उदाहरण ३. $य^{२}-यर-२र^{२}+य+र$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$$य^{२}-यर-२र^{२}+य+र$$
$$=(य+र)(य-२र)+(य+र)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$=(य+र)(य-२र+१)$ उत्तर

प्रश्नावली २४

गुणनखण्ड ज्ञात करो—

१. $४य^२+१२य र+९र^२-८य-१२र$

२. $य^४-२य^३र+२य^२र^२-२यर^३+र^४$

३. $य^२+य+र-ल-र^२-ल^२+२रल$

४. $९य^२+४रल-९य-६र+३ल-ल^२-४र^२$

५. $य^३+७य^२+७य+१$ ६. $य^३-य+४र-६४र^३$

७. $य^३-३यर+९र-२७$ ८. $य(२+य^२)-र(२+र^२)$

९. $य^२-४र^२+२य+१२र-८$

१०. $क^२ग^२-क^२घ^२-ख^२ग^२+ख^२घ^२-४कखगघ$

११. $(क^२-ख^२)(य^२-र^२)+४कखयर$

१२. $५य^२+८यर-४य+३र^२-४र$

१३. $६य^२+५यर-६र^२+१५य-१०र$

१४. $४य^२+८यल-१२रल-९र^२$

१५. $क^४-२क^३+२क-१$ १६. $क^४+क^३+४क^२+क-३$

प्रश्नावली २५ (विविध)

गुणनखण्ड ज्ञात करो—

१. $२य^३र^२ल^२-८र^३य^२ल^३-६ल^३य^२र^२$

२. $(य-र)^३-२(य-र)^२+(य-र)$

३. $कय^२+कल^२+कर^२-२खय^२-२खर^२-२खल^२$

४. $कख(य^२+र^२)+यर(क^२+ख^२)$

५. $य^४+२+\frac{१}{य^४}$

६. $४(य-र)^२+९ल^२-१२ल(य-र)$

७. $य^८र-य^२र^७$ ८. $९(य-र)^२-४(य+र)^२$

९. $(क+ख)^४-(क-ख)^४$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. $९क^{२}-४ख^{२}-ग^{२}+४खग+६क+४ख-२ग$

११. $४क^{४}+८क^{२}ख^{२}+९ख^{४}$

१२. $क^{४}+६४$

१३. $य^{२}-४::य+५६०$

१४. $य^{२}-य-२$

१५. $६य^{२}-११य-३५$

१६. $३य^{२}+४य+१$

१७. $८(य+१)^{२}+२(य+१)(र+२)-१५(र+२)^{२}$

१८. $१६-६य-य^{२}$

१९. $(य+२)^{३}+१$

२०. $य^{३}-३(य-३)-२७$

२१. $१२५य^{५}र^{२}-२७य^{२}र^{५}$

२२. $(य+१)^{३}-१$

२३. $य^{४}-१६र^{४}$

२४. $८य^{३}-र^{३}$

२५. $८य^{३}+र^{३}-२य-र$

२६. $य^{४}+य^{२}+१$

२७. $य^{४}-३य^{२}+१$

२८. $(य-१)^{३}+८(य+१)^{३}$

२९. $(य^{३}-र^{३})+(य^{२}-र^{२})+(य-र)$

३०. $य^{२}-\left(अ+\frac{१}{अ}\right)य+१$

३१. $(य^{२}-५य)^{२}+१०(य^{२}+५य)+२४$

३२. $य(य+१)-क(क+१)$

३३. $य^{८}-१६$

३४. $य^{२}+ल^{२}+२यर-२यल-२रल$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ५

गुणनखण्डन पर कठिन प्रश्न

ग्यारहवाँ प्रकार

$(य+क)(य+ख)(य+ग)(य+घ)+प$ के रूप के व्यंजकों के गुणनखंड—

उदाहरण १. $(य+१)(य+२)(य+३)(य+४)+१$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

टिप्पणी : इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड प्राप्त करने के लिये $(य+१)(य+२)(य+३)(य+४)$ में से ऐसे दो-दो खण्डों के गुणनफल ज्ञात करो जिनमें दो-दो पद समान हों। यदि व्यंजक का दूसरा पद संख्यात्मक हो तो खण्डों के जोड़े छाँटने में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि उनके गुणनफलों में पहला तथा दूसरा पद समान हो। समान पदों को किसी एक बीजीय अक्षर के बराबर रख लो। फिर इनको भी गुणा करलो। इस प्रकार जो गुणनफल प्राप्त होगा, उसके गुणनखंड सातवें प्रकार की भाँति प्राप्त कर लेंगे।

$$\therefore \quad (य+१)(य+२)(य+३)(य+४)+१$$
$$=(य+१)(य+४)(य+२)(य+३)+१$$
$$=(य^{२}+५य+४)(य^{२}+५य+६)+१$$
$$=(क+४)(क+६)+१, \text{ जब कि } क=य^{२}+५य$$
$$=क^{२}+१०क+२४+१$$
$$= \quad +१०क+२५$$
$$=(\quad +५)^{२}$$
$$=(य^{२}+५य+५)^{२}, \quad क=य^{२}+५य \text{ रख कर}$$

उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $(य-२)(य-४)(य-३)(य-६)-१२य^२$ के गुणनखंड ज्ञात करो ।

टिप्पणी : यदि व्यंजक का दूसरा पद कय^२ के रूप का हो तो खण्डों के जोड़े छाँटने में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि उनके गुणनफलों में पहला तथा तीसरा पद समान हो ।

$$(य-२)(य-४)(य-३)(य-६)-१२य^२$$
$$=(य-२)(य-६)(य-४)(य-३)-१२य^२$$
$$=(य^२-८य+१२)(य^२-७य+१२)-१२य^२$$
$$=(क-८य)(क-७य)-१२य^२, \text{ जब कि } क = य^२+१२$$
$$=क^२-१५कय+५६य^२-१२य^२$$
$$=क^२-१५कय+४४य^२$$
$$=(क-११य)(क-४य)$$
$$=(य^२+१२-११य\ (य^२+१२-४य),$$
$$क=य^२+१२ \text{ रख कर}$$
$$=(य^२-११य+१२)\ य^२-४य+१२)$$ उत्तर

प्रश्नावली २६

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $(य+१)(य+७)(य+१०)(य+४)-१७५$
२. $(क+२)(क+६)(क+८)(क+४)-८४$
३. $(क-२)(क+३)(क+१)(क-४)+२४$
४. $क(२क+१)(क-२)(२क-३)-६३$
५. $(क+३)(क^२-१)(क+५)-९$
६. $(२क-१)(क+२)(२क-७)(क+५)-३४$
७. $(य-३)(य-२)(य+४)(य+६)+२य^२$
८. $(य-१)(य+२)(३य-१)(३य+२)+८य^२$
९. $(य-३)(य-२)(य-६)(य-४)-१२य^२$
१०. सिद्ध करो कि चार क्रमागत संख्याओं (Consecutive numbers) के गुणनफल तथा एक का योगफल पूर्ण वर्ग होता है ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

बारहवाँ प्रकार

य^3+र^3+ल^3—३यरल के रूप के व्यंजक के गुणनखंड :—

य^3+र^3=(य+र)^3—३यर(य+र)

∴ य^3+र^3+ल^3—३यरल

=(य+र)^3—३यर(य+र)+ल^3—३यरल

=(य+र)^3+ल^3—३यर(य+र)—३यरल

=(य+र+ल) {(य+र)^2+ल^2—ल(य+र)}

—३यर(य+र+ल)

=(य+र+ल)(य^2+र^2+२यर+ल^2—यल—लर)

—३यर(य+र+ल)

=(य+र+ल) (य^2+र^2+ल^2+२यर—यल—लर

—३यर)

=(य+र+ल) (य^2+र^2+ल^2—यर—रल—लय) उत्तर

उदाहरण १. य^3—र^3—ल^3—३यरल के गुणनखंड ज्ञात करो।

∵ य^3—र^3=(य—र)^3+३यर (य—र)

∴ य^3—र^3—ल^3—३यरल

=(य—र)^3+३यर (य—र)—ल^3—३यरल

=(य—र)^3—ल^3+३यर(य—र)—३यरल

=(य—र—ल) {(य—र)^2+ल^2+ल (य—र)}

+३यर(य—र—ल)

=(य—र—ल) (य^2+र^2—२यर+ल^2+लय—लर)

+३यर (य—र—ल)

=(य—र—ल) (य^2+र^2—२यर+ल^2+लय—लर+३यर)

=(य—र—ल) (य^2+र^2+ल^2+यर+लय—लर) उत्तर

उदाहरण २. य^4+$\frac{१}{य^4}$—२ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

य^4+$\frac{१}{य^4}$—२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= य^३ + \frac{१}{य^३} + १ - ३$$

$$= \left(य + \frac{१}{य}\right)^३ - ३य \times \frac{१}{य}\left(य + \frac{१}{य}\right) + १ - ३$$

$$= \left(य + \frac{१}{य}\right)^३ + १^३ - ३\left(य + \frac{१}{य}\right) - ३$$

$$= \left(य + \frac{१}{य} + १\right)\left\{\left(य + \frac{१}{य}\right)^२ + १ - \left(य + \frac{१}{य}\right)\right\}$$

$$- ३\left(य + \frac{१}{य} + १\right)$$

$$= \left(य + \frac{१}{य} + १\right)\left(य^२ + \frac{१}{य^२} + २ + १ - य - \frac{१}{य}\right)$$

$$- ३\left(य + \frac{१}{य} + १\right)$$

$$= \left(य + \frac{१}{य} + १\right)\left(य^२ + \frac{१}{य^२} + २ + १ - य - \frac{१}{य} - ३\right)$$

$$= \left(य + \frac{१}{य} + १\right)\left(य^२ + \frac{१}{य^२} - य - \frac{१}{य}\right)$$ उत्तर

प्रश्नावली २७

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $क^३ + ख^३ + ग^३ - ३कखग$

२. $क^३ + ख^३ - ग^३ + ३कखग$

३. $क^३ - ख^३ - ग^३ - ३कखग$

४. $क^३ - ख^३ + ग^३ + ३कखग$

५. $क^२ + ख^३ + १ - ३कख$

६ $२७क^३ - ८ख^३ - ग^३ - १८कखग$

७. $८क^३ - २७ख^३ + १ + १८कख$

८. $क^३ - ख^३ + २१६ + १८कख$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. $(क-ख)^३-(ख-ग)^३+(ग-क)^३+३(क-ख)(ख-ग)(ग-क)$

१०. $(क+१)^३+(क+२)^३-(क+३)^३+३(क+१)(क+२)(क+३)$

११. $क^३+\frac{१}{क^३}+२$ [संकेत : २ को $-१+३$ में प्रकट करो]

१२. $क^३-\frac{१}{क^३}-१४$

$क^३+ख^३+ग^३-३कखग$ का मान बताओ

१३. यदि $क+ख+ग=६$, $क^२+ख^२+ग^२=१०$

१४. यदि $क+ख+ग=४$, $कख+खग+कग=५$

१५. यदि $क^२+ख^२+ग^२=१९$ और $कख+खग+कग=१५$

तेरहवाँ प्रकार

जबकि $य+र+ल=०$ तो $य^३+र^३+ल^३$ के रूप के व्यंजक के गुणनखंड :—

$\because$ $य+र+ल=०$

$\therefore$ $य+र=-ल$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$य^३+र^३+३यर(य+र)=-ल^३$

अर्थात् $य^३+र^३+ल^३=-३य(य+र)=-३यर(-ल)$

$=३यरल$

अतः जब तीन राशियों का योगफल शून्य होता है तो उन राशियों के घनों का योगफल उन राशियों के गुणनफल की तीन गुने के बराबर होता है।

उदाहरण ३. $(क-ख)^३+(ख-ग)^३+(ग-क)^३$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

मान लिया $क-ख=य$, $ख-ग=र$ और $ग-क=ल$

$य+र+ल=०$

अतः $य^३+र^३+ल^३=३यरल$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

य, र और ल का मान रखने पर,

$(क-ख)^३+(ख-ग)^३+(ग-क)^३$

$=३\ (क-ख)\ (ख-ग)\ (ग-क)$ उत्तर

प्रश्नावली २८

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $(य-र)^३+(र-ल)^३+(ल-य)^३$

२. $(य-२)^३+(य-३)^३+(५-२य)^३$

३. $(य-२र)^३+(२र-३ल)^३+(३ल-य)^३$

४. $य^३+(य-३)^३+(३-२य)^३$

५. $(३य+५)^३-(य+२)^३-(२य+३)^३$

६. $(य-२र)^३+(२र-ल)^३+(ल-य)^३$

७. यदि $य=र+ल$, तो सिद्ध करो कि
$य^३-र^३-ल^३-३यरल=०$

८. यदि $३य=र+२$ तो सिद्ध करो कि
$२७य^३-र^३-१८यर=८$

९. यदि $य+र=ल$ तो सिद्ध करो कि
$य^३+र^३-ल^३+३यरल=०$

शेषफल-प्रमेय (Remainder Theorem)

$२य^३+५य^२-७य+३$ को $य-२$ से भाग दो।

$$
\begin{array}{r|l}
 & २य^२+९य+११ \\
\hline
य-२ & २य^३+५य^२-७य+३ \\
 & २य^३-४य^२ \\
\hline
 & ९य^२-७य+३ \\
 & ९य^२-१८य \\
\hline
 & ११य+३ \\
 & ११य-२२ \\
\hline
 & २५
\end{array}
$$

$\therefore$ $२य^३+५य^२-७य+३$ को $य-२$ से भाग देने पर शेषफल २५ आता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्यंजक $२य^३+५य^२-७य+३$ में $य=२$ रखकर व्यंजक का मान बताओ ।

$$२य^३+५य^२-७य+३=२\times(२)^३+५\,(२)^२-७\times२+३$$
$$=१६+२०-१४+३=२५$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि व्यंजक में $य=२$ रखें तो उसका मान वही आता है जो उस व्यंजक को $य-२$ से भाग करने पर शेषफल आता है ।

पुनः $कय^३+खय^२+गय+घ$ को $य-प$ से भाग दो ।

$$\begin{array}{l|l} य-प & कय^२+(कप+ख)\,य+(कप^२+खप+ग) \\ \hline & कय^३+खय^२+गय+घ \\ & कय^३-कपय^२ \\ \hline & (कप+ख)\,य^२+गय+घ \\ & (कप+ख)\,य^२-(कप^२+पख)\,य \\ \hline & (कप^२+पख+ग)\,य+घ \\ & (कप^२+पख+ग)\,य-(कप^३+खप^२+गप) \\ \hline & कप^३+खप^२+गप+घ \end{array}$$

यदि व्यंजक $कय^३+खय^२+गय+घ$ में यदि $य=प$ पर रखें तो इसका मान भी $कप^३+खप^२+ग+घ$ आता है ।

शेषफल प्रमेय—यदि य के किसी व्यजक को $य-प$ से भाग करते हैं तो शेषफल वही आता है जो इस व्यजक में $य=प$ रखने से उसका मान आता है ।

टिप्पणी : यदि य के व्यंजक को $य+प$ से भाग दें तो व्यंजक में $य=-प$ रखने से शेषफल प्राप्त होगा ।

उदाहरण १. यदि $२य^३+३य^२+३य+५$ को $य-२$ से भाग दें तो शेषफल बताओ ।

व्यजक $२य^३+३य^२+३य+५$ में य के स्थान पर २ रखने पर ,

$$शेषफल=२(२)^३+३(२)^२+३\times२+५$$
$$=२\times८+३\times४+६+५$$
$$=१६+१२+६+५=३९ ।$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. सिद्ध करो कि व्यंजक $२य^२+५य+२$ का गुणनखण्ड $य+२$ है।

व्यंजक $२य^२+५य+२$ में य के स्थान पर (-२) रखने पर,

शेषफल $=२(-२)^२+५(-२)+२=८-१०+२=०$

$\because$ शेषफल शून्य है, इसलिए $य+२$, व्यंजक $२य^२+५य+२$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण ३. यदि व्यंजक $२य^३+३य^२+कय-६$ का एक गुणनखण्ड $य+२$ है तो क का मान बताओ।

व्यंजक $२य^३+३य^२+कय-६$ में य के स्थान पर (-२) रखने पर,

शेषफल $=२(-२)^३+३(-२)^२+क(-२)-६$

$=२(-८)+३\times४-२क-६$

$=-१६+१२-२क-६=-१०-२क$

$\because$ $य+२$, व्यंजक $२य^३+३य^२+कय-६$ का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore$ शेषफल शून्य होना चाहिए

$\therefore$ $-१०-२क=०$

या, $२क=-१०$; या, $क=\frac{-१०}{२}=-५$। उत्तर

उदाहरण ४. यदि व्यंजक $३य^३+पय^२-७०य+फ$, $य^२+२य-२४$ पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है तो प और फ के मान बताओ।

$य^२+२य-२४=(य+६)(य-४)$

यदि दिया हुआ व्यंजक $य^२+२य-२४$ से पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है तो दिया हुआ व्यंजक $य+६$ और $य-४$ से भी अलग-अलग पूरा-पूरा विभाजित हो जाना चाहिये।

$\therefore$ दिये हुए व्यंजक को पृथक्-पृथक् $य+६$ और $य-४$ से विभाजित करने पर जो शेषफल आते हैं वे शून्य के बराबर होने चाहिये।

व्यंजक $३य^३+पय^२-७०य+फ$ में य के स्थान पर (-६) रखने पर,

शेषफल $=३(-६)^३+प(-६)^२-७०(-६)+फ$

$=-६४८+३६प+४२०+फ=३६प+फ-२२८$ ...(१)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्यंजक $३य^{३}+पय^{२}-७०य+फ$ में य के स्थान पर ४ रखने पर,

शेषफल $=३(४)^{३}+प(४)^{२}-७०(४)+फ$

$=१९२+१६प-२८०+फ \quad १६प+फ-८८$ ...(२)

$\therefore \quad ३६प+फ-२२८=०$ ...(३)

और $१६प+फ-८८=०$ ...(४)

(३) में से (४) घटाने पर,

$$२०प-१४०=०$$

$$\therefore \quad प=\frac{१४०}{२०}=७$$

प का मान (४) में रखने पर,

$$१६\times७+फ-८८=०$$

$$\therefore \quad फ=८८-११२=-२४$$

अतः $प=७$ और $फ=-२४$। उत्तर

उदाहरण ५. यदि $य+प$ से व्यंजक $य^{२}-य-६$ और $य^{२}+३य+२$ पूर्णतया विभाजित हो जाते हैं तो प का मान बताओ।

$य^{२}-य-६$ में $य=-प$ रख कर

शेषफल $=(-प)^{२}-(-प)-६=प^{२}+प-६$ ....(१)

$य^{२}+३य+२$ में $य=-प$ रखकर

शेषफल $=(-प)^{२}+३(-प)+२=प^{२}-३प+२$ ....(२)

$\because$ $य+प$ से व्यंजक $य^{२}-य-६$ और $य^{२}+३य+२$ पूर्णतया विभाजित हो जाते हैं,

$\therefore प^{२}+प-६=०$ ...(३)

और $प^{२}-३प+२=०$ ...(४)

(३) में से (४) घटाने पर,

या, $४प-८=०$, $\therefore प=२$। उत्तर

प्रश्नावली २९

शेषफल प्रमेय द्वारा ज्ञात करो यदि

१. $य^{२}-य+८$ को $य-२$ से भाग दें

२. $य^{३}-५$ को $य-१$ से भाग दें

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $२य^{३} - ५य^{२} + य - ७$ को $य - १$ से भाग दें

४. $य^{३} - ६य^{२} + ५य + १७$ को $य + २$ से भाग दें

५. $य^{४} - ८य^{३} + १७य^{२} + य + ५$ को $य + १$ से भाग दें

६. $४य^{३} - २य^{२} + ३$ को $२य + १$ से भाग दें

७. $२य^{३} - ३य^{२} + २य - २$ को $२य - १$ से भाग दें

८. $य^{२} + र^{३}$ को $य + र$ से भाग दें

९. $४य^{३} - १६य^{२} क + २१ यक^{२} - ९क^{३}$ को $य - क$ से भाग दें

सिद्ध करो कि

१०. $य^{२} + ४य + ९$ का गुणनखण्ड $य + ३$ है

११. $य^{३} - ३य^{२} + ३य - १$ का गुणनखंड $य - १$ है

१२. $क^{३} - ख^{३}$ का गुणनखंड $क - ख$ है।

१३. $य^{३} - ७य^{२} + १५य - ९$ के दो गुणनखंड $(य - १)$ और $(य - ३)$ हैं।

१४. $य^{३} - ५य^{२} + ८य - ४$ का एक गुणनखण्ड $(य^{२} - ३य + २)$ है।

१५. क के किस मान के लिये $य^{३} - ७य^{२} + कय + क$ का एक गुणनखण्ड $य - ३$ है ?

१६. यदि $य^{३} - ३य^{२} + ३य - क$, $य - १$ से पूर्णतया विभाजित हो जावे तो क का मान बताओ।

१७. यदि $य^{४} + ६य^{३} - २०य^{२} + कय + ख$ को $य^{२} - ३य + २$ पूर्णतया विभाजित कर देता है तो क और ख के मान बताओ।

१८. यदि $३ - २य - य^{२}$ से $य^{५} + २य^{४} + ४य^{३} + ९य^{२} - पय + फ$ पूर्णतया विभाजित हो जाता है तो प और फ के मान बताओ।

१९. यदि $य + क$ से व्यंजक $य^{२} + : य + ६$ और $य^{२} + २य - ३$ पूर्णतया विभाजित हो जाते हैं तो क का मान बताओ।

२०. यदि $य + प$ से व्यजक $य^{२} + मय + न$ और $य^{२} + कय + ख$ पूर्णतया विभाजित हो जाते हैं तो प का मान बताओ।

शेषफल प्रमेय की सहायता से गुणनखंड :—

हम यह देख चुके हैं कि यदि य के किसी व्यंजक (expression) में $य = प$ रखने से शेषफल शून्य आता है तो $य - प$ उस व्यंजक का एक गुणन-

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

खंड है। इससे स्पष्ट है कि यदि हमें यह मालूम करना है कि य के किसी व्यंजक का य—प एक गुणनखण्ड है या नहीं तो उस व्यंजक में य के स्थान पर प रखकर देख लें कि शेषफल शून्य है या नहीं। यदि शेषफल शून्य है तो य—प उस व्यंजक का गुणनखण्ड है। यदि हमें यह मालूम करना है कि य के किसी व्यंजक का य+प एक गुणनखण्ड है या नहीं तो उस व्यंजक में य के स्थान पर (—प) रखकर देखेंगे कि शेषफल शून्य है या नहीं।

अतः यदि हमें य के किसी व्यंजक के शेषफल प्रमेय की सहायता से गुणनखंड ज्ञात करने हैं तो उस व्यंजक में य=१ रखकर देखेंगे कि शेषफल शून्य है या नहीं। यदि नहीं है तो य=—१ रखकर देखो। यदि शेषफल फिर भी शून्य नहीं आता तो य=२ और य=—२ रखकर देखो। यदि फिर भी शेषफल शून्य नहीं आता तो य=३ और य=—३ रखकर देखो। मान लिया कि य=३ रखकर शेषफल शून्य आ जाता है तो य—३ एक गुणनखंड है।

फिर व्यंजक को इस प्रकार रखो कि य—३ उसका सार्वगुणनखण्ड हो।

उदाहरण १. $य^३—८य^२+१७य—१०$ के गुणनखंड ज्ञात करो।

∵ दिये हुए व्यंजक में य के स्थान पर १ रखने पर, शेषफल शून्य आता है,

∴ य—१ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखण्ड है।

अब दिये हुए व्यंजक को इस प्रकार रखो कि य—१ सार्वगुणनखण्ड निकल आवे।

$$\begin{aligned}
\therefore\ & य^३—८य^२+१७य-१० \\
&= य^३—य^२—७य^२+७य+१०य—१० \\
&= य^२(य—१)—७य\ (य—१)+१०(य—१) \\
&= (य—१)(य^२—७य+१०) \\
&= (य—१)\ \{य^२—५य-२य+१०\} \\
&= (य—१)\ \{य(य—५)—२(य—५)\} \\
&= (य—१)(य—५)(य—२)
\end{aligned}$$

उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $य^{१} + १२य^{२} + ४४य + ४८$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$\because$ य के स्थान पर (-२) रखने पर शेषफल शून्य हो जाता है,

$\therefore$ $य + २$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore \quad य^{१} + १२य^{२} + ४४य + ४८$$
$$= य^{१} + २य^{२} + १०य^{२} + २०य + २४य + ४८$$
$$= य^{२}(य + २) + १०य(य + २) + २४(य + २)$$
$$= य(य + २)(य^{२} + १०य + २४)$$
$$= (य + २)(य^{२} + ६य + ४य + २४)$$
$$= (य + २)\{य(य + ६) + ४(य + ६)\}$$
$$= (य + २)(य + ६)(य + ४)$$

उत्तर

टिप्पणी—यह मालूम करने के लिये कि य के स्थान पर कौन सी संख्या रखें कि शेषफल शून्य हो जावे, तो सर्वप्रथम व्यंजक के अन्तिम अचर (Constant) पद के गुणनखण्ड करें और उन्हीं खण्डों में से एक-एक खण्ड को य के स्थान पर रखकर देखें कि किस खण्ड के लिये शेषफल शून्य होता है। उन खंडों के अतिरिक्त अन्य संख्या रखने में समय नष्ट नहीं करना चाहिये। यदि व्यंजक के सब पद धनात्मक हैं, तो $य = १, २, ३, \cdots$ रखने से शेषफल कभी शून्य नहीं होगा। अतः ऐसे व्यंजक के $(य - १), (य - २), (य - ३) \cdots$ गुणनखण्ड नहीं हो सकते।

उदाहरण ३. $१२य^{३} + ४य^{२} - ३य - १$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

$य^{३}$ के गुणांक १२ से इस व्यंजक के प्रत्येक पद को भाग दो तो यह

$य^{३} + \frac{१}{३}य^{२} - \frac{१}{४}य - \frac{१}{१२}$ हो जायगा। इस व्यंजक के अन्तिम अचर

पद $\frac{१}{१२}$ के गुणनखण्ड १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{११}$ हो सकते हैं।

इन खण्डों में से एक-एक को य के स्थान पर रखने से ज्ञात हुआ कि य के स्थान पर $\frac{१}{२}$ रखने से शेषफल शून्य हो जाता है।

अतः $२य - १$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है।

$$\therefore \quad १२य^{३} + ४य^{२} - ३य - १$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= १२य^{३} - ६य^{२} + १०य^{२} - ५य + २य - १$

$= ६य^{२}(२य - १) + ५य(२य - १) + (२य - १)$

$= (२य - १)(६य^{२} + ५य + १)$

$= (२य - १)(६य^{२} + ३य + २य + १)$

$= (२य - १)\{३य(२य + १) + (२य + १)\}$

$= (२य - १)(२य + १)(३य + १)$ । उत्तर

प्रश्नावली ३०

गुणनखण्ड ज्ञात करो—

१. $य^{३} + २य^{२} - १३य + १०$

२. $य^{३} + य^{२} - १०य + ८$

३. $य^{३} + ५य^{२} + ३य - ९$

४. $य^{३} - ४य^{२} - ११य - ६$

५. $य^{३} - य^{२} - ५य - ३$

६. $य^{३} - १०य^{२} + ३६य - ४०$

७. $य^{३} + १०य^{२} + ४४य + ५६$

८. $य^{३} - य^{२} + ४य - ३०$

९. $य^{३} + ५य^{२} + १५य + २७$

१०. $य^{३} + ३य^{२} - ४$

११. $य^{३} - ६य + ५$

१२. $य^{३} - ७य + ६$

१३. $य^{३} - १८य + २८$

१४. $२य^{३} - ५य^{२} + य + २$

१५. $४य^{३} - य^{२} - ४य + १$

१६. $२य^{३} - ३य^{२} - १७य - १२$

१७. $४य^{३} - ९य - ५$

१८. $२य^{३} - ३य + १$

१९. $१२य^{३} + ४य^{२} - ३य - १$

२०. $४य^{३} + य + १$

२१. $४य^{३} + य - १$

२२. $य^{४} - ४य^{३} - ९य^{२} + ३य + ८$

२३. $२य^{४} - ७य^{३} + ४य^{२} + ५य - ४$

चक्रीयक्रम (Cyclic order)

चक्रीय क्रम (cyclic order) : मान लिया कि एक वृत्त कखग है। यदि हम परिधि के चारों ओर क से तीर की दिशा में चलना आरम्भ करें तो क से ख पर, ख से ग पर और ग से क पर आयेंगे। यदि हम इसी प्रकार चक्कर काटते रहें तो अक्षर क, ख और ग इसी क्रम में आते रहेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि हम अक्षर ख से तीर की दिशा में चलना आरम्भ करें तो अक्षर ख, ग और क के क्रम में और यदि अक्षर ग से चलना आरम्भ करें तो अक्षर ग, क और ख के क्रम में आते रहेंगे।

इस क्रम को चक्रीय क्रम (cyclic order) कहते हैं।

चक्रीय क्रम के पद : पदों कखग, खगक और गकख में यदि क के स्थान पर ख, ख के स्थान पर ग और ग के स्थान पर क रख देते हैं तो पहला पद, दूसरा पद, दूसरा पद तीसरा पद और तीसरा पद पहला पद हो जावेगा। ऐसे पदों को चक्रीय क्रम के पद कहते हैं।

चक्रीय क्रम के व्यंजक : निम्न व्यंजक पर ध्यान दो :—

अब (अ—ब)+बस (ब—स)+सअ (स—अ)

इस व्यंजक में तीन पद हैं।

(i) अब (अ—ब), (ii) बस (ब—स), (iii) सअ (स—अ)

यदि इन पदों में अ के स्थान पर ब, ब के स्थान पर स और स के स्थान पर अ रख दें तो पहला पद दूसरा पद, दूसरा पद तीसरा पद तथा तीसरा पद पहला पद हो जावेगा। ऐसे व्यंजक को चक्रीय क्रम का व्यंजक कहते हैं।

अतः यदि किसी व्यंजक के तीन पद इस प्रकार एक-दूसरे से सम्बन्धित हों कि अ के स्थान पर ब, ब के स्थान पर स तथा स के स्थान पर अ रखने से पहला पद दूसरा पद, दूसरा पद तीसरा पद और तीसरा पद पहला पद हो जावे तो यह व्यंजक अ, ब और स के चक्रीय क्रम का व्यंजक कहलाता है। जैसे : —

निम्नलिखित व्यंजक चक्रीय क्रम के व्यंजक हैं :—

१. अब+बस+सअ

२. अबस+बसअ+सअब

३. (अ+ब)+(ब+स)+(स+अ)

४. अ(ब+स)+ब(स+अ)+स(अ+ब)

५. बस(ब^2—स^2)+सअ(स^2—अ^2)+अब(अ^2—ब^2)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

चक्रीय-क्रम के व्यंजकों के गुणनखण्ड—जब किसी चक्रीय क्रम के व्यंजक के गुणनखण्ड करने होते हैं तो व्यंजक के कोष्ठों को खोलकर उसे किसी एक अक्षर के अवरोही क्रम (desending order) में रख लेते हैं और उसमें से सार्वगुणनखण्ड अलग कर लेते हैं। फिर दूसरे खण्ड को दूसरे अक्षर के अवरोही क्रम में रखकर उसमें से सार्वगुणनखण्ड पृथक् कर लेते हैं। इसके पश्चात् तीसरे खंड को (यदि आवश्यकता हो) तीसरे अक्षर के अवरोही क्रम में रखकर उसके गुणनखंड कर लेते हैं।

उदाहरण १. यर (य—र)+रल(र—ल)+लय(ल—य) के गुणनखंड ज्ञात करो।

क्रिया : यर(य—र)+रल(र—ल)+लय(ल—य)

$=$ य^{2}र—यर^2+र^{2}ल—रल^2+यल^2—य^{2}ल

$=$ य^{2}र—य^{2}ल—यर^2+यल^2+र^{2}ल—रल^2

(य के अवरोही क्रम में)

$=$ य^2(र—ल)—य(र^2—ल^2)+रल(र—ल)

$=$ (र—ल){य^2—य(र+ल)+रल}

$=$ (र—ल)(य^2—यर—यल+रल)

$=$ (र—ल)(—यर+रल—यल+य^2)

$=$ (र—ल){र(—य+ल)—य(ल—य)}

$=$ (र—ल)(ल—य)(र—य)

$=$ —(य—र)(र—ल)(ल—य) उत्तर

उदाहरण २. यर(य+र)+रल(र+ल)+लय(ल+य)+२यरल के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

क्रिया : यर(य+र)+रल(र+ल)लय(ल+य)+२यरल

$=$ य^{2}र+यर^2+र^{2}ल+रल^2+यल^2+य^{2}ल+२यरल

$=$ य^{2}र+य^{2}ल+यर^2+यल^2+२यरल+र^{2}ल+रल^2

$=$ य^2(र+ल)+य(र^2+ल^2+२रल)+रल(र+ल)

$=$ य^2(र+ल)+य(र+ल)^2+रल(र+ल)

$=$ (र+ल){य^2+य(र+ल)+रल}

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= (र+ल)(य^2+यर+यल+रल)$

$= (र+ल)(रल+यर+यल+य^2)$

$= (र+ल)\{र(ल+य)+य(ल+य)\}$

$= (र+ल)(ल+य)(र+य)$

$= (य+र)(र+ल)(ल+य)$ उत्तर

उदाहरण ३. $य(र^2+ल^2)+र(ल^2-य^2)+ल(य^2+र^2)+३यरल$ के गुणनखण्ड ज्ञात करो।

क्रिया : $य(र^2+ल^2)+र(ल^2+य^2)+ल(य^2+र^2)+३यरल$

$= यर^2+यल^2+रल^2+रय^2+लय^2+लर^2+३यरल$

$= य^2र+य^2ल+यर^2+लर^2+यल^2+ल^2र+३यरल$

$= य^2र+य^2ल+यरल+यर^2+लर^2+यरल+यल^2$
$+ल^2र+यरल$

$= य(यर+यल+रल)+र(यर+लर+यल)$
$+ल(यल+लर+यर)$

$= (यर+यल+रल)(य+र+ल)$ उत्तर

प्रश्नावली ३१

गुणनखंड ज्ञात करो :—

१. $य^2(र-ल)+र^2(ल-य)+ल^2(य-र)$

२. $य(र^2-ल^2)+र(ल^2-य^2)+ल(य^2-र^2)$

३. $य(र^3-ल^3)+र(ल^3-य^3)+ल(य^3-र^3)$

४. $य^3(र^2-ल^2)+र^3(ल^2-य^2)+ल^3(य^2-र^2)$

५. $रल(र^2-ल^2)+लय(ल^2-य^2)+यर(य^2-र^2)$

६. $य^2(र+ल)+र^2(ल+य)+ल^2(य+र)+२यरल$

७. $य(र^2+ल^2)+र(ल^2+य^2)+ल(य^2+र^2)+२यरल$

८. $य(र-ल)^2+र(ल-य)^2+ल(य-र)^2+८यरल$

९. $य^2(र+ल)+र^2(ल+य)+ल^2(य+र)+३यरल$

१०. $यर(य+र)+रल(र+ल)+लय(ल+य)+३यरल$

११. $(य+र)(र+ल)(ल+य)+यरल$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ६

महत्तम समापवर्तक
(HIGHEST COMMON FACTOR)

अंकगणित में तुमने पढ़ा है कि

(अ) **अपवर्तक** (Factor)—वह संख्या जो किसी दूसरी दी हुई संख्या को पूरा-पूरा विभाजित करती है, दी हुई सख्या की **अपवर्तक** कहलाती है। जैसे १८ के २, ३, ६, ९ और १८ अपवर्तक हैं।

(आ) **समापवर्तक** (Common Factor)—दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक को पूरा-पूरा विभाजित करने वाली संख्या को दी हुई संख्याओं का **समापवर्तक** कहते हैं। जेसे २, ३ और ६ संख्याओं ६, १२, १८ के समापवर्तक हैं।

(इ) **महत्तम समापवर्तक** (Highest Common Factor)—उस बड़ी से बड़ी संख्या को दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक को पूरा-पूरा विभाजित करती है, **महत्तम समापवर्तक** कहते हैं। जैसे ६, १२ और १८ का महत्तम समापवर्तक ६ है।

इसी प्रकार बीजगणित में—

(अ) वह बीजीय व्यंजक या पद जो किसी दिये हुए व्यंजक को पूरा-पूरा विभाजित करता है, दिये हुए व्यंजक का **अपवर्तक** कहलाता है। ५, य, र, ५य, ५र···५यर के अपवर्तक हैं।

(आ) दो या दो से अधिक दिये हुए व्यंजकों में से प्रत्येक को पूरा-पूरा विभाजित करने वाले व्यंजक या पद को उन यंव्जकों का **समापवर्तक** कहते हैं। जैसे ५, ५य, ५र, ५यर—५यर और १०य^{२}र के समापवर्तक है। इसी प्रकार २य(य+२)(य−५), ३य^{२}(य+३)(य+२) और ४य^{३}(य+२)(य−२) का समापवर्तक य(य+२) है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(इ) उस बड़े से बड़े व्यंजक अथवा पद को जो दो या दो से अधिक दिये हुए व्यंजकों में से प्रत्येक को पूरा पूरा विभाजित करता है, दिये हुए व्यंजकों का **महत्तम समापवर्तक** कहते हैं। जैसे ४यर, १९य^{२}र और १५यर^{२} का महत्तम समापवर्तक ५यर है। इसी प्रकार (य—२) (य—३) (य—४), (य—२) (य—४)(य—५) और (य—१)(य—४)(य—२) का महत्तम समापवर्तक (य—२)(य—४) है।

सूचना—महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म० स० अथवा म० स० प० लिखते हैं।

महत्तम समापवर्तक (H. C. F.) ज्ञात करना

बीजगणित में भी महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की वही रीतियाँ हैं जो अंकगणित में है—(१) गुणनखंड की रीति और (२) भाग की रीति।

(१) गुणनखंड की रीति से महत्तम समापवर्तक

सर्वप्रथम दिये हुए पदों अथवा व्यंजकों में से प्रत्येक के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर लेते हैं। फिर उनमें से सार्वगुणनखंड (Common factor) छाँट लेते हैं। उन सार्वगुणनखंडों का गुणनफल ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक है।

उदाहरण १. यरल और यर^{२} का म० स० प० ज्ञात करो।

∵ यरल = य × र × ल

और यर^{२} = य × र × र

∴ अभीष्ट म० स० प० = य × र = यर।

उदाहरण २. ७२य^{४}र^{३}ल^{२}, —१२०य^{३}रल और ५४यर^{२}ल^{२} का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करो।

∵ ७२य^{४}र^{३}ल^{२} = २ × २ × २ × ३ × ३ × य × य × य × य × र × र × र × ल × ल,

—१२०य^{३}रल^{२} = —२ × २ × २ × ३ × ५ × य × य × य × र × ल × ल × ल

और ५४यर^{२}ल^{२} = २ × ३ × ३ × ३ × य × र × र × ल × ल

∴ अभीष्ट म० स० प० = २ × ३ × य × र × ल × ल

= ६यरल^{२}। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

दो अथवा अधिक एक पदी व्यंजकों का महत्तम समापर्तक उन व्यंजकों के संख्यात्मक गुणांकों (Numerical Ccefficients) के महत्तम समापवर्तक तथा छोटी से छोटी घात वाले सर्वानिष्ठ (Common to all) अक्षरों के गुणनफल के बराबर होता है।

इस प्रकार सरल व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक अवलोकन मात्र से ही ज्ञात किये जा सकते हैं।

प्रश्नावली ३२

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करो :—

१. $य^{४}, य^{६}, य^{३}$,

२. $यर^{२}य^{२}र$,

३. $य^{२}र^{३}, य^{६}र^{२}$ और $य^{२}र^{२}ल^{२}$

४. $य^{२}रल^{४}, र^{२}ल^{३}क^{४}, ल^{२}क^{३}य^{४}$

५. $यरल^{२}, रलय^{२}, यलर^{२}$

६. $१५क^{४}ख^{३}, २०क^{३}ख^{१}, २५क^{२}ख^{४}$

७. $६५य^{४}र^{३}ल^{२}, ७८र^{४}ल^{२}य^{२}, ३९ल^{४}य^{३}र^{२}$

८. $२४य^{३}र^{४}ल^{३}, ३०य^{७}र^{३}ल^{३}, १२य^{४}र^{७}ल^{५}, १८य^{२}र^{५}ल^{४}$

९. $१४क^{५}ख^{४}ल^{३}, २१क^{७}क^{३}ल^{२}य, ३५क^{८}ख^{६}ल^{२}य^{३}$

१०. $४२क^{६}ख^{४}ग^{४}, ६३क^{८}ख^{३}ग^{८}, ८४क^{३}ख^{६}ग^{५}, १०५क^{५}ख^{४}ग^{४}$

उदाहरण १. $३०य^{४}र^{३}(य-र), २४य^{३}र^{४}(य-र)^{२}$ तथा $३६य^{३}र^{२}(य-र)^{३}$ का म० स० प० ज्ञात करो।

$$\because \quad ३०य^{४}र^{३}(य-र) = २\times३\times५\times य\times य\times य\times य\times र\times र\times र\times(य-र),$$

$$२४य^{३}र^{४}(य-र)^{२} = २\times२\times२\times३\times य\times य\times र\times र\times र\times र\times(य-र)(य-र)$$

$$तथा \quad ३६य^{३}र^{२}(य-र)^{३} = २\times२\times३\times३\times य\times य\times य\times र\times र\times(य-र)(य-र)(य-र)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ अभीष्ट म० स० प० $= २ \times ३ \times य \times य \times र \times र \times (य - र)$

$= ६य^{२}र^{२}(य - र)$। उत्तर

उदाहरण २. $य^{२} - ५य + ६$, $य^{२} - ६य + ८$ और $य^{३} - ८$ का म० स० प० ज्ञात करो।

$$य^{२} - ५य + ६ = य^{२} - ३य - २य + ६$$
$$= य(य - ३) - २(य - ३)$$
$$= (य - ३)(य - २)$$

$$य^{२} - ६य + ८ = य^{२} - ४य - २य + ८$$
$$= य(य - ४) - २(य - ४)$$
$$= (य - ४)(य - २)$$

$$य^{३} - ८ = (य - २)(य^{२} + २य + ४)$$

$\therefore$ अभीष्ट म० स० प० $= य - २$। उत्तर

प्रश्नावली ३३

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करो :—

१. $य^{२} + यर$ तथा $यर + र^{२}$

२. $२य^{२}र^{२} + १०यर^{३}$ और $४य^{३}र^{४} + ६यर^{५}$

३. $१४(य^{२} - २५)$ और $२१(य^{३} - १२५)$

✓४. $य^{२} - र^{२}$, $(य + र)^{२}$, $य^{३} + र^{३}$

✓५. $य^{२} - ४$, $य^{२} - १०य + १६$

६. $य^{२} - १$, $य^{२} + ४य + ३$, $य^{२} + ३य + २$

७. $२य^{२} + ७यर - १५र^{२}$, $८य^{३} - २७र^{३}$ तथा $१४य^{२}र - २१यर$

८. $६य^{२} - ११य + ३$ तथा $६य^{२} + २५य - ९$

९. $२४(य^{३} - र^{३})$ और $४०(य^{४} + य^{२}र^{२} + र^{४})$

१०. $य^{३} + ८र^{३}$ और $य^{२} + यर - २र^{२}$

११. $य^{४} - य$ और $य^{३} + य^{२} + य$

१२. $(य - र)^{२} - ल^{२}$, $(य + ल)^{२} - र^{२}$ तथा $(ल - र)^{२} - य^{२}$

१३. $य^{४} - २५य^{२}$, $य^{४} + ३य^{२} - १०य^{२}$ तथा $य^{३} + २य^{२} - १५य$

१४. $२य^{२} + ९य + ४$, $२य^{२} + ११य + ५$ तथा $२य^{२} - ३य - २$

१५. $३य^{२} + ४य + १$, $३य^{२} - ५य - २$ तथा $९य^{२} - १$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६. $य^२ - र^२$, $य^४ - र^४$ तथा $य^६ - र^६$

१७. $य^३ + १$, $(य + १)^३$, $य^३ + य$

१८. $य^२ + य - २$, $(य - १)^२$, $य^३ - १$

१९. $य^२ + य - ६$, $य^२ + २य - ८$ तथा $२य^२ - ५य + २$

२०. $य^२ + य - २$ और $य^३ + य^२ + ६य$

(२) भाग की रीति से महत्तम समापवर्तक

यदि दिये हुए व्यंजकों के गुणनखड सुगमता से नहीं ज्ञात किये जा सकते तो उनका महत्तम समापवर्तक भाग की रीति से ज्ञात किया जा सकता है।

इस रीति से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सिद्धान्तों को भली प्रकार समझ लेना अत्यन्त आवश्यक है।

यदि दो बीजीय व्यंजक क और ख का महत्तम समापवर्तक म हो, तो

(१) क, ख, क + ख तथा क − क का भी महत्तम समापवर्तक म होता है।

उपपत्ति : मान लिया क = मय और ख = मर, जहाँ य और र परस्पर में अभाज्य राशियाँ हैं। अतः

$$क + ख = मय + मर = म(य + र)$$

और $क - ख = मय - मर = म(य - र)$

इस प्रकार क, ख, क + ख तथा क - ख सभी में म सम्मिलित है।

अतः क, ख, क + ख और क − ख का महत्तम समापवर्तक म है।

(२) यदि क को ख से विभाजित करने से शेषफल श हो तो क, ख और श का महत्तम समापवर्तक म होता है।

उपपत्ति : पहले की तरह क = मय और ख = मर

अब यदि ख से क को भाग देने पर भागफल म आता हो, तो

$$क = भख + श$$

$$\therefore मय = भमर + श$$

अर्थात् $श = मय - भमर = म(य - भर)$

अतः म, श का भी अपवर्तक है। किन्तु क और ख दोनों अलग-अलग श से बड़े हैं और क और ख का महत्तम समापवर्तक म है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ क, ख और तीनों का समापवर्तक य है।

टिप्पणी : इसी प्रकार यदि क को श से भाग दें और नया शेष $श_1$ प्राप्त हो तो श और $श_1$ का महत्तम समापवर्तक भी म होगा जो क और श का है।

(३) क और खप का महत्तम समापवर्तक भी म होता हैं जबकि क और प में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

उपपत्ति : क = मय और ख = मर (पहले की तरह)

∴ खप = मरप जिसमें कि य सम्मिलित है।

अतः क और खप का भी महत्तम समापवर्तक म है।

(४) और $\frac{ख}{प}$ का महत्तम समापवर्तक भी म होता है जब कि क और प में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है और प, ख को पूरा-पूरा विभाजित करता है।

उपपत्ति : ∵ क = मय और ख = मर

∵ प, ख को पूरा-पूरा विभाजित करता है

$\therefore \frac{ख}{प} = ग$ (मान लिया)..... (अ)

अब चूँकि ख में म सम्मिलित है और प में म सम्मिलित नहीं है

$\therefore ग = \frac{यर}{प}$ अर्थात् म, ग का भी एक गुणनखण्ड है।

मान लिया = ग = मघ

(अ) से, $\frac{ख}{प}$ = मघ जिसमें म सम्मिलित है।

अतः क और $\frac{ख}{प}$ का भी समापवर्तक म है।

इन सिद्धान्तों से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की निम्न रीति निकलती है :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भाग की रीति से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना—

(१) व्यंजकों को किसी अक्षर के अवरोही क्रम (Descending order) में लिखो।

(२) उस अक्षर के बड़े घात वाले व्यंजक को भाज्य और छोटे घात वाले व्यंजक को भाजक के रूप में लिखो। (यदि दोनों व्यंजक उस अक्षर के समघाती हों, तो किसी को भी भाज्य या भाजक मान सकते हैं)।

(३) भाग की क्रिया से प्राप्त शेषफल को नया भाजक और पूर्व भाजक को नया भाज्य मानकर भाग दो।

(४) इस क्रिया को उस समय तक करते रहो जब तक शेषफल शून्य न हो जावे।

(५) यदि दिये हुए व्यंजकों में से किसी एक का ऐसा गुणनखण्ड हो जो दूसरे का न हो तो उसको अलग करके बचे हुए खंड से म० स० प० निकालो।

(६) यदि दिये हुए व्यंजकों का कोई गुणनखण्ड उभयनिष्ठ हो तो उससे व्यंजकों को भाग देकर भजनफलों का म० स० प० ज्ञात करली। अभीष्ट म० स० प० इस म० स० प० और उभयनिष्ठ गुणनखण्ड का गुणनफल होगा।

(७) भाग की क्रिया के बीच, यदि आवश्यकता हो, तो किसी भी स्थान पर भाज्य अथवा भाजक को किसी भी संख्या से, जो दिये हुए व्यंजकों का सार्वगुणनखन्ड न हो, गुणा या भाग कर सकते हैं। इससे हमारे म० स० प० पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा, क्योंकि म० स० प० के लिए तो हमें केवल उभय निष्ठ गुणनखण्डों की आवश्यकता है।

(८) म० स० प० के दो उत्तर हो सकते हैं एक धन चिह्न के साथ और दूसरा ऋण चिह्न के साथ। साधारणतया धन चिह्न वाला ही उत्तर लिखा जाता है।

उदाहरण १. $य^{१}-य^{२}-५य-३$ और $य^{१}-४य^{२}-११य-६$ का म० स० प० ज्ञात करो।

यहाँ दोनों व्यंजक समघाती हैं अतः किसी को भी भाज्य अथवा भाजक माना जा सकता है—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$
\begin{array}{l}
य^३-य^२-५य-३)\ य^३-४य^२-११य-६\ (१ \\
\qquad\qquad\qquad\quad य^३-य^२-५य-३ \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{-३)-३य^२-६य-३} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad य^२+२य+१
\end{array}
$$

यहाँ शेषफल में -३ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है जबकि यह भाज्य का गुणनखण्ड नहीं है। अतः शेष को -३ से भाग दो। इस प्रकार प्राप्त भागफल $य^२+२य+१$ नया भाजक होगा और प्रथम भाजक $य^३-य^२-५य-३$ नया भाज्य होगा।

$$
\begin{array}{l}
य^२+२य+१)\ य^३-य^२-५य-३\ (य-३ \\
\qquad\qquad\quad \underline{य^३+२य^२+य} \\
\qquad\qquad\quad -३य^२-६य-३ \\
\qquad\qquad\quad \underline{-३य^२-६य-३} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \times
\end{array}
$$

शेष शून्य है। अतः अंतिम भाजक $य^२+२य+१$ अभीष्ट महत्तम समापवर्तक है।

उदाहरण २. $य^३+८य^२+१८य+१५$ और $य^३+४य^२-य+२०$ का म० स० प० ज्ञात करो।

$$
\begin{array}{l}
य^३+४य^२-य+२०)\ य^३+८य^२+१८य+१५\ (१ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{य^३+४य^२-य+२०} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ४य^२+१९य-५ \\
४य^२+१९य-५)\ य^३+४य^२-य+२० \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ४ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{४य^३+१६य^२-४य+८०}\ (य \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{४य^३+१९य^२-५य} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -३य^२+य+८० \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ४ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{-१२य^२+४य+३२०}\ (-३ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-१२य^२-५७य+१५} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ६१)\ \underline{६१य+३०५} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad य+५
\end{array}
$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

य+५)४य² + १९य — ५(४य — १
४य² + २०य
—य — ५
—य — ५
×

∴ अभीष्ट म० स० प० = य + ५

लिखने की दूसरी रीति—

	य³ + ४य² — य + २०	य³ + ८य² + १८य + १५	१
	४	य³ + ४य² — य + २०	
य	४य³ + १६य² — ४य + ८०	४य² + १९य — ५	४य —
	४य³ + १९य² — ५य	४य² + २०य	१
	— ३य² + य + ८०	—य — ५	
	४	—य — ५	
— ३	— १२य² + ४य + ३२०	×	
	— १२य² — ५७य + १५		
	६१)६१य + ३०५		
	य + ५		

उदाहरण ३. १६ य⁶ + ६य³ + २०य² और २०य⁵ + ६य⁴ + १६य का म० स० प० निकालो।

१६य⁶ + ६य³ + २०य² = २य²(८य⁴ + ३य + १०)

और २०य⁵ + ६य⁴ + १६य = २य (१०य⁴ + ३य³ + ८)

२य² और २य का म० स० प० = २य

२य	८य⁴ + ३य + १०	१०य⁴ + ३य³ + ८	
	८य⁴ — १०य² — १२य	४	
	५)१०य² + १५य + १०	४०य⁴ + १२य³ + ३२	५
	२य² + ३य + २	४०य⁴ — १५य + ५०	
		३)१२य³ — १५य — १८	
		४य³ — ५य — ६	२य
		४य³ + ४य + ६य²	
		— ६य² — ९य — ६	— ३
		— ६य² — ९य — ६	
		×	

∴ अभीष्ट म० स० प० = २य(२य² + य + २) उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ३४

म० स० प० ज्ञात करो :—

१. $य^3 - ४य^2 + ७य - ६$ और $२य^3 - ७य^2 + २य + ८$

२. $२य^2 - ३य + १$ और $२य^3 - ३य^2 - य + १$

३. $क^2 + ३क - १०$ और $क^3 + क^2 - ५क - २$

४. $३य^3 + १०य^2 + ७य - २$ और $३य^3 + १३य^2 + १७य + ६$

५. $य^3 - ७य + ६$ तथा $य^4 - ५य + ४$

६. $य^4 + य^3 - य - १$ और $य^4 - य^3 + य - १$

७ $य^3 + २य^2 - ८य - १६$ और $य^3 + ६य^2 + ११य + ६$

८. $य^3 - १$ और $य^{12} - १$

९. $य^3 + ४य^2 - ५$ और $य^3 - ३य + २$

१०. $य^4 - ५य^3 + ८य^2 - ५य + १$ और $२य^4 - ७य^3 + ९य^2 - ५य + १$

११. $य^4 - ३य + २०$ और $५य^4 - ३य^3 + ६४$

१२. $य^3 + ६य^2 + ११य + ६$ और $य^3 + १३य^2 + ४७य + ३५$

१३. $४य^5 + १४य^4 + २०य^3 + ७०य^2$ और $८य^7 + २८य^6 - ८य^5 - १२य^4 + ५६य^3$

१४. $९य^4 + २य^2र^2 + र^4$ ओर $३य^4 - ८य^3र + ५य^2र^2 - २यर^3$

१५. $१२य^4 - य^3 - ३०य^2 - १६य$ और $६य^4 - २य^3 - १३य^2 - ६य$

दो से अधिक व्यंजकों का म० स० प०—

(i) सर्वप्रथम दिये हुए व्यंजकों में से किन्हीं दो का म० स० प० ज्ञात करो।

(ii) इस प्रकार प्राप्त म० स० प० और तीसरे व्यंजक का म० स० प० ज्ञात करो।

(iii) यही क्रिया करते रहो जब तक कि सब व्यंजक समाप्त न हो जावें। अन्तिम म० स० प० अभीष्ट म० स० प० होगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ३५

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करो :—

१. $२य^{३}+७य^{२}-५य-४$, $य^{३}+८य^{२}+११य-२०$ और $२य^{३}+१९य^{२}+४९य+२०$

२. $य^{३}-६य^{२}+११य-६$, $य^{३}-९य^{२}+२३य-१५$ और $२य^{३}-९य^{२}+१३य-६$

३. $य^{३}-४य^{२}+५य-२$, $य^{३}-३९य+७०$ और $य^{३}-१४य^{२}+५६य-६४$

४. $६य^{३}+५य^{२}र-३४यर^{२}+१५र^{३}$, $६य^{३}-३७य^{२}र+५७यर^{२}-२०र^{३}$ और $३य^{३}-८य^{२}र-३१यर^{२}+६०र^{३}$

५. $य^{३}-७य-६$, $य^{३}-६य^{२}+५य+१२$ और $य^{३}+३य^{२}-१३य-१५$

विविध-प्रश्न

उदाहरण १. य के किस मान के लिए व्यंजकों $४य^{३}-३य^{२}-२४य-९$ और $८य^{३}-२य^{२}-५३य-३९$ के शून्य हो जावेंगे ?

य	$४य^{३}-३य^{२}-२४य-९$	$८य^{३}-२य^{२}-५३य-३९$	२
	$४य^{३}-५य^{२}-२१य$	$८य^{३}-६य^{२}-४८य-१८$	
२य+३	$२य^{२}-३य-९$	$४य^{२}-५य-२१$	२
	$२य^{२}-६य$	$४य^{२}-६य-१८$	
	$३य-९$	$य-३$	
	$३य-९$		
	×		

दिये हुए व्यंजकों का म० स० प० – य – ३

यदि य – ३ का मान शून्य हो जावेगा तो दिये हुए व्यंजकों का मान भी शून्य हो जावेगा।

$\therefore$ य – ३ = ० ; $\therefore$ य = ३

अतः य = ३ के लिए व्यंजकों का मान शून्य हो जावेगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ३६

१. य के किस मान के लिए व्यंजकों $य^3+३य^2+३य+१$ और $य^3+५य^2+८य+४$ के मान शून्य हो जावेंगे ?

२. य के किस मान के लिए व्यंजकों $य^3+य^2-१२$ और $य^3+२य^2-५य-६$ के मान शून्य हो जावेंगे ?

३. यदि $पय^2+य-७फ$ और $पय^2-फय+१६$ का म० स० प० $य-४$ हो तो प और फ के मान बताओ।

४. यदि $पय^2+फय+म$ और $फय^2+पय+म$ का म० स० प० $य+२$ हो तो सिद्ध करो कि

या तो $प=फ$ या $प+फ+म=०$

५. $य^3-४य^2+७य-६$ और $२य^3-७य^2+२य+८$ का सार्वगुणनखंड (Common factor) ज्ञात करो।

६. वह बड़े से बड़ा व्यंजक बताओ जिससे $३य^{15}-५य^3+५य+५$ और $२य^{15}-५य^3+१०य+१$ को भाग करने पर प्रत्येक दशा में $५य+३$ शेषफल रहे।

७. वह शर्त बताओ जिसके कारण $य^2+पय+मफ$ और $य^2+मय+पफ$ का कोई सार्वगुणनखंड (Common factor) हो सके।

[संकेत : दूसरे व्यंजक को पहले व्यंजक से भाग करो और शेषफल को शून्य के बराबर रखो।]

८. वह शर्त बताओ जिसके कारण $य^3+५य^2+३य-९$ और $य^2+३य-४$ का कोई सार्वगुणनखंड हो सके।

९. यदि $य^2+मय+न$ और $य^2+पय+फ$ का महत्तम समापवर्तक $य+क$ हो, तो सिद्ध करो कि $=क\frac{न-फ}{म-प}$।

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ७

लघुत्तम समापवर्त्य
(LEAST COMMON MULTIPLE)

अंकगणित में पढ़ चुके हैं कि

(१) वह संख्या जो किसी दूसरी संख्या से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती हैं, दूसरी संख्या का **अपवर्त्य** कहलाती है। जैसे ३ का अपवर्त्य ६, ९, १२ आदि हैं।

(२) वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है, दी हुई संख्याओं का **समापवर्त्य** कहलाती है। जैसे ३, ४ तथा ६ का समापवर्त्य १२, २४, तथा ३६ आदि हैं।

(३) वह छोटी से छोटी संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है, दी हुई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती है। जैसे ३, ४ और ६ का **लघुत्तम समापवर्त्य** १२ है।

ठीक इसी प्रकार बीजगणित में,

अपवर्त्य (Multiple)—वह पद अथवा व्यंजक है जो किसी दिये हुए पद अथवा व्यंजक से पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है। जैसे २य का अपवर्त्य ४य, ४य^{२}, ६य^{३} आदि हैं।

समापवर्त्य(Common Multiple)—वह पद अथवा व्यंजक है जो दो या दो से अधिक दिये हुए पदों और व्यंजको में से प्रत्येक से पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है। जैसे य, २य और २र के समापवर्त्य २यर, २य^{२}र, ४य^{२}र^{२} आदि हैं :

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

लघुत्तम समापवर्त्य (Least common multiple)—वह छोटे से छोटा पद अथवा व्यजक है जो दो या दो से अधिक दिये हुए पदों और व्यजकों में से प्रत्येक से पूरा-पूरा विभाजित हो जाता है। जैसे य, २य और २र का लघुत्तम समापवर्त्य २यर है।

सूचना : लघुत्तम समापवर्त्य को संक्षेप में ल० स० अथवा ल० स० प० कह देते हैं।

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना—

सर्वप्रथम दिये हुए पदों अथवा व्यंजकों के रूढ़ गुणनखंड ज्ञात कर लेते हैं। फिर इन गुणनखंडों में से पृथक-पृथक गुणनखंड को इकट्ठा कर लेते हैं। एक गुणनखंड को हम अधिक से अधिक उतनी बार लेते हैं जितनी बार वह अधिक से अधिक किसी एक व्यंजक में है। इन गुणनखंडों का गुणनफल ही अभीष्ट ल० स० प० होता है।

उदाहरण १. ३य^{२}रल, ४यर^{२}ल और ६यरल^{२} का ल० स० प० ज्ञात करो।

$$३य^{२}रल = ३ \times य \times य \times र \times ल$$
$$४यर^{२}ल = २ \times २ \times य \times र \times र \times ल$$
$$६यरल^{२} = २ \times ३ \times य \times र \times ल \times ल$$
$$\therefore \quad अभीष्ट\ ल०\ स०\ प० = ३ \times य \times य \times र \times ल \times २ \times २ \times र \times ल$$
$$= ३ \times २ \times २ \times य \times य \times र \times र \times ल \times ल$$
$$= १२य^{२}र^{२}ल।$$

उत्तर

उपर्युक्त उदाहरणों से हम ल० स० प० ज्ञात करने की निम्न रीति निकालते हैं :—

सर्वप्रथम दिये हुए पदों अथवा व्यंजकों के संख्यात्मक गुणांकों का ल० स० प० ज्ञात करो और फिर प्रत्येक अक्षर अथवा गुणनखण्ड का वह घात लो जो उन पदों अथवा व्यंजकों में सबसे बड़ा हो। उन सबका गुणनफल अभीष्ट ल० स० प० होगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $६क^{१}ख^{२}ग$, $५क^{२}ख^{४}$ और $८ख^{१}ग^{४}$ का ल० स० प० ज्ञात करो।

पदों के संख्यात्मक गुणाकों ६, ५ और ८ का ल० स० प०=१२०।

तीनों पदों में क का उच्चतम घात $क^{१}$,

ख का उच्चतम घात $ख^{४}$ तथा ग का उच्चतम घात $ग^{४}$ है,

∴ अभीष्ट ल० स० प०=$१२०क^{१}ख^{४}ग^{४}$। उत्तर

उदाहरण ३. $य^{२}+य$, $य^{२}+३य+२$ और $य^{२}-४$ का ल० स० प० ज्ञात करो।

(i) $य^{२}+य=य(य+१)$,

(ii) $य^{२}+३य+२=य^{२}+२य+२$

$=य(य+२)+(य+२)$

$=(य+२)(य+१)$

(iii) और $य^{२}-४=य^{२}-२^{२}$

$=(य-२)(य+२)$

∴ अभीष्ट ल० स० प०=$य(य+१)(य+२)(य-२)$ उत्तर

टिप्पणी—यदि दिये हुए व्यंजकों में कोई समापवर्तक नहीं है तो उनका ल० स० प० उनके गुणनफल के बराबर होगा।

प्रश्नावली ३७

ल० स० प० ज्ञात करो—

१. $य^{२}र$ और $यर^{२}$ २. $य^{३}रल^{२}$, $यर^{१}ल^{४}$, $य^{२}र^{४}क^{२}$

३. $३क^{२}खग$, $४कख^{३}ग^{२}$, $५क^{४}ख^{२}ग^{४}$

४. $८कखग^{६}ल$, $१२क^{११}ख^{४}ग^{७}$, $२०ख^{६}ग^{८}ल^{१}$

५. $८यर^{३}ल^{१}$, $१२य^{११}ल$, $१०रल^{११}$

६. $२०य^{८}र^{२}क$, $२५र^{१}ल^{२}क^{२}$, $३०क^{४}य^{२}$

७. $(य+र)$ और $(य+र)^{१}$

८. $२यर(य-र)$ और $४य^{२}(य-र)^{२}$

९. $(य+१)(य-२)$, $(य-२)^{२}(य+३)$ और $(य+१)(ल+३)^{२}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. (ब+स) (स+अ), (स+अ) (अ+ब) और (अ+ब), (ब+स)

११. (य+र), $(य^2-र^2)$ और $(य+र)^2$

१२. $य^2र-यर^2$, $य^2-र^2$ और $य^2+३यर+२र^2$

१३. $य^2-७य+१२$, $३य^2-६य-९$ और $२य^3-६य^2-८य$

१४. $य^2-१$, $य^2+४य+३$ और $य^2-३य+२$

१५. $य^3+२य^2-य-२$, $(य^2-१)^2$ और $(य^2-१)$

१६. $(य+१)^2$, $य^2+३य+२$, $य^3+८$

१७. $६य^2-११य+३$ और $६य^3+२५य^2-९य$

१८. $य^2+१$, $य^3-१$ और $य^3+१$

१९. $६(य^3+यर)$, $८(यर-र^3)$ और $१०(य^2-र^2)$

२०. $य^2-१$, $य^3+य^2+य+१$ और $य^3-य^2+य-१$

२१. क−१, क+३ और $क^2+२क-३$

२२. $य^3-र^3$, $य^3-र^3$, $य^2+यर+र^2$ और $य^4+य^2र^2+र^4$

२३. य−र, य+र, $य^2-र^2$ तथा $य^4-र^4$

२४. $क^4+क^2ख^2+ख^4$, $क^3ख+ख^4$ और $(क^2+कख)^3$

२५. $(य^2-१)$, $(य^2+१)$, $(य-१)^2$, $(य+१)^2$ और $य^3-१$

२६. $य^2-र^2$, $य^3-र^3$ और $य^3-य^2र-यर^2+र^3$

२७. $९य^4-२८य^3+३$, $२७य^4-१२य^2+१$ और $य^4-६य^2+९$

२८. $य^2+२यर+र^2-ल^2$, $य^2-र^2+यल-रल$

२९. $४(य^4-य^2र^2)$, $६(य^2र^2+र^4)$ और
$१२(य^3-य^2र+यर^2-र^3)$

महत्तम समापवर्तक की सहायता से ल० स० प० ज्ञात करना—

जब दिये हुए व्यंजकों के गुणनखंड सुगमता से नहीं ज्ञात होते तो उनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की रीति निम्न सिद्धान्त पर निर्भर है—

दो व्यंजकों का गुणनफल उनके म० स० प० और ल० स० प० के गुणनफल के बराबर है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया क और ख ऐसे दो व्यंजक हैं जिनका महत्तम समापवर्तक म और लघुत्तम समापवर्त्य ल है।

और मान लिया क और ख को म से अलग-अलग भाग देने पर भागफल क्रमशः य और र आता है, तो

क = मय और ख = मर जहाँ य और क परस्पर में अभाज्य राशियाँ हैं क्योंकि क और ख का म० स० प० म है।

∴ क और ख का ल० स० प० वही होगा जो मय और मर का होता है।

∴ ल = मयर

अब क × ख = मय × मर = म × मयर

= म × ल ...(१)

∴ क × ख = उनका म० स० प० × उनका ल० स० प०

समीकरण (१) से, ल = क × $\frac{ख}{म}$ या ल = $\frac{क}{म}$ × ख

∴ ल० स० प० = $\frac{\text{एक व्यंजक} \times \text{दूसरा व्यंजक}}{\text{म० स० प०}}$

अतः दो व्यंजकों का ल० स० प० ज्ञात करने की निम्न रीति है :—

सर्वप्रथम दिये हुए दोनों व्यंजकों का म० स० प० ज्ञात करो। फिर दोनों व्यंजकों में से किसी एक को म० स० प० से भाग दो। भागफल और दूसरे व्यंजक का गुणनफल ही अभीष्ट ल० स० प० होगा।

तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का ल० स० प०

यदि तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का ल० स० प० ज्ञात करना हो, तो पहले दिये हुए व्यंजकों में से कोई से दो व्यंजकों का उपर्युक्त रीति द्वारा ल० स० प० ज्ञात कर लो। फिर इस ल० स० प० और तीसरे व्यंजक का ल० स० प० ज्ञात करो। इसी प्रकार क्रिया करते रहो। अन्तिम ल० स० प० ही अभीष्ट ल० स० प० होगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $४य^४ - ५य^२ + १$ और $४य^४ + ४य^३ + य^२ - १$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करो।

२य	$४य^४ \quad -५य^२ \quad +१$	$४य^४ + ४य^३ + य^२ \quad -१$	१
-३	$४य^४ + ६य^३ \quad -२य$	$४य^४ \quad -५य^२ \quad +१$	
	$-६य^३ - ५य^२ + २य + १$	२) $४य^३ + ६य^२ \quad -२$	य + १
	$-६य^३ - ९य^२ \quad +३$	$२य^३ + ३य^२ \quad -१$	
	२) $४य^२ + २य - २$	$२य^३ + य^२ - य$	
	$२य^२ + य - १$	$२य^२ + य - १$	
		$२य^२ + य - १$	
		×	

∴ दिये हुए व्यंजकों का म० स० प० $= २य^२ + य - १$

∴ अभीष्ट ल० स० प० $= \dfrac{(४य^४ - ५य^२ + १)(४य^४ + ४य^३ + य^२ - १)}{२य^२ + य - १}$

$= (४य^४ - ५य^२ + १)(२य^२ + य + १)$

उदाहरण २. दो व्यंजकों का म० स० प० $य^२ + १$ और ल० स० प० $य^५ - २य^४ + ४य^३ - ९य^२ + ३य - ६$ हैं। यदि उन व्यंजकों में से एक व्यंजक $य^३ - २य^२ + य - २$ है, तो दूसरा व्यंजक बताओ।

∵ एक व्यंजक × दूसरा व्यंजक = म० स० प० × ल० स० प०

∴ $(य^३ - २य^२ + य - २) \times$ दूसरा व्यंजक $= (य^२ + १)\ (य^५ - २य^४ + ४य^३ - ८य^२ + ३य - ६)$

∴ दूसरा व्यंजक $= \dfrac{(य^२ + १)\ (य^५ - २य^४ + ४य^३ - ८य^२ + ३य - ६)}{य^३ - २य^२ + य - २}$

$= (य^२ + १)\ (य^२ + ३) = य^४ + ४य^२ + ३$ उत्तर

उदाहरण ३. दो व्यंजकों क और ख के महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य क्रमशः म और ल हैं। यदि क + ख = म + ल, तो सिद्ध करो कि $क^२ + ख^२ = म^२ + ल^२$।

∵ दो व्यंजकों का गुणनफल = उनके म० स० प० और ल० स० प० का गुणनफल।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ क ख = म ल ...(1)

∵ क + ख = म + ल

∴ $(क+ख)^2$ = $(म+ल)^2$

या, $क^2 + २कख + ख^2 = म^2 + ल^2 + २मल$

∵ कख = मल

∴ $क^2 + ख^2 = म^2 + ल^2$ ।

प्रश्नावली ३८

लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करो—

१. $२य^3 - ५य - ३९$ और $य^4 - २१य - १८$

२. $य^4 + २य^3 - ५य^2 - ६य + ९$ और $य^4 - य^3 + ६य - ९$

३. $य^3 - य^2 + ४य - ३०$ और $२य^3 - ६य^2 - ३य + ९$

४. $य^4 - ५य^3 + ८य^2 - ५य + १$ और $२य^4७ - य^3 + ९य^2 - ५य + १$

५. $य^3 - ७य - ६$, $य^3 - ६य^2 + ५य + १२$ और $य^3 + ३य^2 - १३य - १५$

६. $य^3 + ४य^2 - १७य + २८$, $य^3 + ३य^2 - १४य + २४$ और $य^3 - ४य^2 - ७य - ४$

७. दो व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक $य + ३$ और लघुतम समापवर्त्य $य^3 - ६य + ६$ है। यदि उनमें से एक व्यंजक $य^2 + य - ६$ है, तो दूसरा व्यंजक बताओ।

८. दो व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक $य - २$ और लघुतम समापवर्त्य $य^5 - ५य^4 + ५य^3 + ५य^2 - ६य$ है। यदि उनमें से एक व्यंजक $य^3 - ३य^2 + २य$ हो तो दूसरा व्यंजक बताओ।

९. दो द्विघात व्यंजकों (Quadratic expressions) का महत्तम समापवर्तक $य - २$ और उनका लघुतम समापवर्त्य $य^3 + ५य^2 - २य - २४$ है। उन व्यंजकों को बताओ।

१० दो संख्याओं प और फ का महत्तम समापवर्तक य और लघुतम समापवर्त्य ल है। यदि प + फ = म + ल, तो सिद्ध करो कि $प^3 + फ^3$ $म^3 + ल^3$ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ८

भिन्न
(FRACTIONS)

भिन्न (Fraction) :—अंकगणित में हम भिन्न तथा उनको सरल करने की विधियों के बारे में पढ़ चुके हैं। बीजगणित में भी साधारणतया भिन्न का अर्थ वही है जो अंकगणित में है और उनको सरल करने की विधियाँ भी वहीं हैं।

अकगणित में भिन्न $\frac{२}{३}$ का अर्थ है कि कोई इकाई तीन बराबर भागों में विभाजित की गई है जिनमें से दो भाग लिये गये हैं। वह राशि जो यह प्रकट करती है कि इकाई को कितने भागों में विभाजित किया गया है हर (denominator) और वह राशि जो यह प्रकट करती है कि कितने भाग लिये गये हैं अंश (numerator) कहलाती है। जैसे भिन्न $\frac{२}{३}$ में ३ को हर और २ को अंश कहते हैं। इसी प्रकार $\frac{य}{र}$ एक बीजीय भिन्न है।

यह भिन्न प्रकट करती है कि कोई इकाई र बराबर भागों में विभाजित की गई है जिनमें से य भाग लिये गये हैं। $\frac{य}{र}$ में य को अंश तथा र को हर कहते हैं। बीजगणित में य और र को भिन्न के पद भी कहते हैं।

यह ध्यान रखना चाहिए कि भिन्न की उपर्युक्त परिभाषा तभी ठीक है जब तक अंश और हर दोनों धनात्मक और पूर्णाङ्क हों। यदि ये राशियाँ ऋणात्मक अथवा स्वयं भिन्न हों तो इस परिभाषा का कोई अर्थ नहीं

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

निकलता। बीजगणित में बीजीय अक्षरों का मान ऋणात्मक और भिन्नात्मक हो सकता है। जैसे $\frac{य}{र}$ में य का मान $\frac{३}{४}$ और र का मान —६ हो सकता है। इसके अतिरिक्त य का मान ८ और र का ४ भी हो सकता है। इस दशा में $\frac{य}{र}$ का मान $\frac{८}{४}$ = २ होगा अर्थात् पूर्णाङ्क होगा। इस समय $\frac{य}{र}$ भिन्न ही नहीं है।

अतः बीजगणित में $\frac{य}{र}$ का अर्थ य÷र का है अर्थात् वह भागफल जो य को र से भाग करने पर आता है। जहाँ पर य और र के मान चाहे धनात्मक हों या ऋणात्मक, पूर्ण संख्या हो अथवा भिन्न।

$\because \frac{य}{र} = य \div र$; चूँकि भाग की रीति गुणा की उलटी होती है

$\therefore \frac{य}{र} \times र = य$;

अतः अंश = भिन्न × हर

भिन्नों का मौलिक नियम (Fundamental rule of fractions)—

(i) $\frac{३}{५} = \frac{३ \times २}{५ \times २} = \frac{६}{१०}$ अर्थात् यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों को एक ही राशि से गुणा करें तो भिन्न का मान नहीं बदलता, और

(ii) $\frac{२०}{३०} = \frac{२० \div १०}{३० \div १०} = \frac{२}{३}$ अर्थात् यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों को एक ही राशि से भाग करें तो भिन्न का मान नहीं बदलता।

इसी प्रकार बीजगणित में भी

यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों को एक ही राशि से गुणा अथवा भाग करें तो भिन्न का मान नहीं बदलता।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

माना लिया कि $\frac{क}{ख}$ कोई भिन्न है और य कोई राशि है तो

$$\frac{क}{ख}=\frac{क\times य}{ख\times य}=\frac{कय}{खय}\text{; और}$$

माना लिया कि $\frac{बस}{बग}$ कोई भिन्न है तो $\frac{बस}{बग}=\frac{बस\div ब}{बग\div ब}=\frac{स}{ग}$ ।

चिन्हों का नियम :—चूंकि $\frac{क}{ख}$ का अर्थ है क÷ख, इसलिए भिन्नों में चिन्हों के नियम वही हैं जो भाग में हैं।

यदि किसी भिन्न के अंश और हर के चिह्न एक से अर्थात् दोनों '+' या दोनों '—' हैं तो भिन्न का चिन्ह धनात्मक है। यदि किसी भिन्न के अंश और हर के चिह्न अपमान अर्थात् एक '+' और दूसरा '—' हैं तो भिन्न का छिह्न ऋणात्मक है। जैसे

(i) $\frac{+य}{+र}=+\frac{य}{र}$, $\frac{-य}{-र}=+\frac{य}{र}$

(iii) $\frac{+य}{-र}=-\frac{य}{र}$ (iv) $\frac{-य}{+र}=-\frac{य}{र}$

समान भिन्न—जब दो भिन्न इस प्रकार की होती हैं कि उनमें से किसी एक भिन्न के अंश और हर दोनों को एक संख्या से गुणा अथवा भाग करके दूसरी भिन्न प्राप्त हो जाती है तो वे दोनों भिन्न समान भिन्न कहलाती हैं। जैसे $\frac{य}{र}$ और $\frac{३य}{३र}$ समान भिन्न हैं।

भिन्न को सरल करना (Reduction of a fraction of its lowest terms)—कोई भिन्न सरल भिन्न तब कहलाती है जब उसके पदों अर्थात् अंश और हर में इकाई के अतिरिक्त कोई अन्य समापवर्तक (Common factor) नहीं होता। जैसे $\frac{२}{३}$ तथा $\frac{७}{१०}$ सरल भिन्न हैं।

अतः किसी भिन्न को सरल करने के लिए

(i) उसके अंश और हर के अभाज्य (prime) गुणनखंड ज्ञात कर लो

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ii) जो गुणनखंड उन दोनों पदों में उभयनिष्ठ हों उनको काट दो यदि किसी भिन्न के अंश और हर के गुणनखंड सुगमता से नहीं हो सकते हैं तो भाग की रीति से उनका महत्तम समापवर्तक ज्ञात कर लो और फिर अंश और हर को महत्तम समापवर्तक से भाग कर दो।

उदाहरण १. $\frac{४२य^३र^२ल^४}{६३य^२र^३ल^६}$ को सरल करो।

$$\frac{४२य^३र^२ल^४}{६३य^२र^३ल^४} = \frac{२\times३\times७\times य\times य\times य\times र\times र\times ल\times ल\times ल\times ल}{३\times३\times७\times य\times य\times र\times र\times र\times ल\times ल\times ल\times ल}$$

$$= \frac{२य}{३र}$$ उत्तर

उदाहरण २. $\frac{य^२+६य+८}{य^२+५य+६}$ को सरल करो।

$\because$ $य^२+६य+८=(य+४)(य+२)$

और $य^२+५य+६=(य+३)(य+२)$

$$\therefore \frac{य^२+६य+८}{य^२+५य+६} = \frac{(य+४)(य+२)}{(य+३)(य+१)} = \frac{य+४}{य+३}$$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{य^३-२य^२-य+२}{य^३-य^२-४य+४}$ को सरल करो।

$\because$ $य^३-२य^२-य+२$ और $य^३-य^२-४य+४$ का म० स० प० $य^२-३य+२$ है, इसलिये अंश और हर दोनों को इससे भाग देने पर,

$$\frac{य^३-२य^२-य+२}{य^३-य^२-४य+४} = \frac{(य^३-२य^२-य+२)\div(य^२-३य+२)}{(य^३-य^२-४य+४)\div(य^२-३य+२)}$$

$$= \frac{य+१}{य+२}।$$ उत्तर

प्रश्नावली ३९

सरल करो :—

१. $\frac{४य^३र^२ल}{२य^२रल^२}$

२. $\frac{१८य^{११}र^३ल^४}{३०य^४र^४ल^६}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $\frac{१५य^२र^२ल^१}{२०य^२र^१ल^२}$

४. $\frac{य^२-यर}{य^२+यर}$

५. $\frac{य^२-र^२}{य^२+३यर+२र^२}$

६. $\frac{२य^२-१०यर}{५०र^२-२य^२}$

७. $\frac{य^२-३य+२}{य^२+४य-५}$

८. $\frac{य^२-२यर+र^२}{य^३-र^२}$

९. $\frac{य-र+ल}{य^२-(र-ल)^२}$

१०. $\frac{य^२-र^२-२रल-ल^२}{य^२+२यर+र^२-ल^२}$

११. $\frac{य^४+४र^४}{य^२+२यर+२र^२}$

१२. $\frac{१-७य+१२य^२}{१-८य+१५य^२}$

१३. $\frac{य^५-य^४र+य^३र^२}{य^३+र^३}$

१४. $\frac{य^४-४य+३}{य^३+य^२+य-३}$

१५. $\frac{य^३+४य^२+२य-१}{य^३-१०य+३}$

भिन्नों का गुणा तथा भाग
(Multiplication and Division of fractions)

बीजगणित में भी भिन्नों के गुणा तथा भाग करने की वही रीति है जो अंकगणित में है।

भिन्नों की गुणा—यदि दो या दो से अधिक भिन्नों को गुणा करना हो तो सब भिन्नों के अंशों को परस्पर गुणा करके नया अंश तथा सब भिन्नों के हरों को परस्पर गुणा करके नया हर प्राप्त करते हैं। नये अंश और नये हर से जो भिन्न बनती है वही अभीष्ट गुणनफल है।

टिप्पणी—गुणा करने से पहले अंशों तथा हरों में जो समापवर्तक (Common factors) हों उनको काट देना चाहिये।

उदाहरण १. $\frac{२य^३+३य}{४य^३} \times \frac{४य^२-६य}{१२य^२+१८}$ को सरल करो।

$$\text{व्यंजक} = \frac{य(२य^२+३)}{२\times२य\times य\times य} \times \frac{२य(२य-३)}{६(२य^२-३)}$$

$$= \frac{(२य-३)}{१२य}$$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भिन्नों का भाग—जब एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करते हैं तो दूसरी भिन्न को उलटकर (अंश के स्थान पर हर और हर के स्थान पर अंश रखकर) उससे पहली भिन्न को गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण २. $\frac{१४य^२-७य}{१२य^३+२४य^२} \div \frac{२य-१}{य^२+२य}$ को सरल करो।

$$\frac{१४य^२-७य}{१२य^३+२४य^२} \div \frac{२य-१}{य^२+२य}$$

$$=\frac{१४य^२-७य}{१२य^३+२४य^२} \times \frac{य^२+२य}{२य-१}$$

$$=\frac{७य\,(२य-१)}{१२य^२\,(य+२)} \times \frac{य(य+२)}{२य-१} = \frac{७}{१२}$$ उत्तर

टिप्पणी : (१) बीजगणित में भी अंकगणित की भाँति पहले 'का', फिर ÷ और अन्त में × की क्रियाओं को किया जाता है।

(२) यदि अंश के सब गुणनखण्ड हर के सब गुणनखण्डों से कट जाते हैं तो उस समय उत्तर १ आयेगा।

उदाहरण ३. $\frac{य^३-१}{य^२-१} \div \frac{य^३+य^२+य}{य-३} \times \frac{य^३-य}{य^२-४य+३}$

$$\frac{य^३-१}{य^२-१} \div \frac{य^३+य^२+य}{य-३} \times \frac{य^३-य}{य^२-४य+३}$$

$$=\frac{य^३-१}{य^२-१} \times \frac{य-३}{य^३+य^२+य} \times \frac{य^३-य}{य^२-४य+३}$$

$$=\frac{(य-१)(य^२+य+१)}{(य-१)(य+१)} \times \frac{य-३}{य(य^२+य+१)} \times \frac{य\,(य-१)(य+१)}{(य-३)(य-१)}$$

$$=१$$ उत्तर

प्रश्नावली ४०

सरल करो :—

१. $\frac{य}{र} \times \frac{र}{ल} \times \frac{२ल}{य}$ २. $\frac{य^४}{ल^३} \times \frac{३र^२}{५य^२} \times \frac{२ल^३}{३र^५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $\frac{४य^२र^२}{३क^२} \times \frac{९क^३र}{१६ल^३} \times \frac{ल^३}{३यर^२}$

४. $\frac{य^२-३य+२}{य^३-५य+६} \times \frac{य^२-८य+१५}{य^२-४य+३}$

५. $\frac{य^३+यर}{य^२-यर} \times \frac{यर-र^२}{यर+र^२} \times \frac{य^२}{यर}$

६. $\frac{र^२-ल^२+२यल}{ल^२+य^२-र^२+२यल} \times \frac{र^२+ल^२-य^२-२रल}{य^२-र^२+ल^२-२यल}$

७. $\frac{(क+ख)^२-ग^२}{क^२+कख-कग} \times \frac{(ख+ग)^२-क^२}{(ग+क)^२-ख^२} \times \frac{क^२+कग-कख}{खग+ग^२-कग}$

८. $\frac{कख}{ग} \div \frac{क^२}{ग}$ ९. $\frac{य^२-र^२}{क^२-ख^२} \div \frac{य+र}{क-ख}$

१०. $\frac{य^३+र^३}{य^३-र^३} \div \frac{य^२-यर+र^२}{य^२+यर+र^२}$

११. $\frac{क^२-७क+१०}{क^२-१०क+२४} \div \frac{क^२-२क-३५}{क^२-७क+१२} \times \frac{क^२-१३क+४२}{क^२-क-६}$

१२. $\frac{य+र}{(य-र)^२} \div \frac{य^२+र^२}{य^२-र^२} \times \frac{य^४-र^४}{(य+र)^२}$

१३. $\frac{य^४-८य}{य^२-४य-५} \div \frac{य^२-य^२-२य}{य^२+२य+१} \times \frac{य-५}{य^२+२य+४}$

१४. $\frac{य^२-१}{य^२+य-२} \times \frac{य^३+८}{य^४+४य^२+१६} \div \frac{य^२+य}{य^३+२य^२+४य}$

१५. $\frac{य^२-१२य+८०}{य^२-५य-५०} \times \frac{य^२-६य-७}{य^२-१५य+५६} \div \frac{य-१}{य+५}$

भिन्नों का योग तथा घटाना

(Addition and subtraction of fraction)

बीजगणित में भी भिन्नों के योग और घटाने की वही रीति है जो अंक-गणित में है। सर्वप्रथम भिन्नों के 'हर' समान कर लेते हैं। (ऐसा करने के लिये

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पहले सब भिन्नों के हरों का ल० स० प० ज्ञात कर लेते हैं। फिर प्रत्येक भिन्न के हर से ल० स० प० को भाग देते हैं और भजनफल से उस भिन्न के अंश को गुणा करते हैं।) नये अंशों का बीजीय योग निकाल लेते हैं। यह बीजीय योग अभीष्ट भिन्न का अंश और ल० स० प० उसका हर होता है।

टिप्पणी : यदि किसी भिन्न का अंश शून्य होता है तो वह भिन्न शून्य के बराबर होती है।

उदाहरण १. $\frac{३य}{४}+\frac{५य}{८}-\frac{७य}{१२}+\frac{९य}{१६}$ को सरल करो।

क्रिया : $\frac{३य}{४}+\frac{५य}{८}-\frac{७य}{१२}+\frac{९य}{१६}$

$=\frac{३६य+३०य-२८य+२७य}{४८}$ (∵ ४, ८, १२ और १६ का ल० स० प० = ४८)

$=\frac{६५य}{४८}$ उत्तर

उदाहरण २. $\frac{य-र}{यर}+\frac{र-ल}{रल}+\frac{ल-य}{यल}$ को सरल करो।

$\frac{य-र}{यर}+\frac{र-ल}{रल}+\frac{ल-य}{यल}$

$=\frac{ल(य-र)+य(र-ल)+र(ल-य)}{यरल}$

$=\frac{यल-रल+यर-यल-रल-यर}{यरल}=\frac{०}{यरल}=०$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{२य-६}{य^२-९य+२०}+\frac{य-१}{य^२-७य+१२}-\frac{य-२}{य^२-८य+१५}$

क्रिया : $\frac{२य-६}{य^२-९य+२०}+\frac{य-१}{य^२-७य+१२}-\frac{य-२}{य^२-८य+१५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{२(य-३)}{(य-४)(य-५)} + \frac{य-१}{(य-३)(य-४)} - \frac{य-२}{(य-३)(य-५)}$$

$$= \frac{२(य-३)^२ + (य-१)(य-५) - (य-२)(य-४)}{(य-४)(य-५)(य-३)}$$

$$= \frac{२य^२ - १२य + १८ + य^२ - ६य + ५ - (य^२ + ६य + ८)}{(य-४)(य-५)(य-३)}$$

$$= \frac{२य^२ - १२य + १५}{(य-४)(य-५(य-३)}$$ उत्तर

उदाहरण ४. $\frac{१}{य-र} - \frac{१}{य+र} - \frac{२र}{य^२+र^२} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$ को सरल करो।

टिप्पणी—इस उदाहरण में सब हरों का एक साथ ल० स० प० निकाल कर इसको सरल करना सुविधाजनक नहीं है। इसको निम्न प्रकार सरल करना चाहिये।

क्रिया : $\frac{१}{य-र} - \frac{१}{य+र} - \frac{२र}{य^२+र^२} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$

$$= \frac{य+र-(य-र)}{(य+र)(य-र)} - \frac{२र}{य^२+र^२} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$$

$$= \frac{२र}{य^२-र^२} - \frac{२र}{य^२+र^२} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$$

$$= \frac{२र(य^२+र^२) - २र(य^२-र^२)}{(य^२+र^२)(य^२-र^२)} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$$

$$= \frac{२य^२र + २र^3 - २य^२र + २र^3}{य^४-र^४} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$$

$$= \frac{४र^3}{य^४-र^४} - \frac{४र^3}{य^४+र^४}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{४र^३ (य^४ + र^४) - ४र^३ (य^४ + र^४)}{(य^४ + र^४)(य^४ - र^४)}$$

$$= \frac{४य^४र^३ + ४र^७ - ४य^४र^३ + ४र^७}{य^८ - र^८} = \frac{८र^७}{य^८ - र^८}$$

प्रश्नावली ४१

सरल करो—

१. $\frac{३य}{५} - \frac{४य}{९} + \frac{२य}{१५} + \frac{७य}{९}$

२. $\frac{१}{२क} + \frac{२}{३क} - \frac{३}{५क}$

३. $\frac{क}{खग} + \frac{ख}{कग} + \frac{ग}{कख}$

४. $\frac{क-ख}{कख} + \frac{ग-ख}{खग} + \frac{क-ग}{कग}$

५. $\frac{१}{क-१} + \frac{३}{क+३} - \frac{४क}{क^२ + २क - ३}$

६. $\frac{१+२य}{४य} + \frac{२+३य}{६य^२} - \frac{३+४य}{१२य^३}$

७. $\frac{२य^२}{य^२ - र^२} - \frac{२य}{य+र}$

८. $\frac{१}{य-र} + \frac{१}{र-य}$

९. $\frac{१}{य^२ - ५य + ६} + \frac{१}{य^२ - ४य + ३} + \frac{१}{य^२ - ३य + २}$

१०. $\frac{१}{य^२ - ३य + २} - \frac{१}{य^२ - ५य + ६} + \frac{१}{य^२ - ४य + ३}$

११. $\frac{य+३}{य^३ - ३य + २} + \frac{य+२}{य^२ - ४य + ३} + \frac{य+१}{य^२ - ५य + ६}$

१२. $\frac{क}{क-ख} + \frac{ख}{क+ख} + \frac{क}{क+ख} + \frac{ख}{ख-क}$

१३. $\frac{य^२ + यर + र^२}{य+र} + \frac{य^२ - यर + र^२}{य-र}$

१४. $\frac{१}{क+ख} + \frac{१}{क-ख} + \frac{२क}{क^२ + ख^२}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१५. $\frac{१}{य+३}+\frac{१}{य-३}-\frac{६}{य^{२}-९}$

१६. $\frac{१}{य-२र}+\frac{१}{य+२र}+\frac{२य}{य^{२}+४र^{२}}+\frac{४य^{३}}{य^{४}+१६र^{४}}$

१७. $\frac{१}{य-१}-\frac{य}{य^{२}-१}-\frac{य^{२}}{य^{४}-१}-\frac{य^{४}}{य^{४}-१}$

१८. $\frac{१}{य-१}-\frac{१}{य+१}+\frac{१}{य-२}-\frac{१}{य+२}$

१९. $\frac{य^{३}-य^{२}र+यर^{२}}{य^{३}+र^{३}}-\frac{य^{३}+य^{३}र+यर^{२}}{य^{३}-र^{३}}$

२०. $\frac{य^{२}-(र-ल)^{२}}{(य+ल)^{२}-र^{२}}+\frac{र^{२}-(य-ल)^{२}}{(य+र)^{२}-ल^{२}}+\frac{ल^{२}-(य-र)^{२}}{(र+ल)^{२}-य^{२}}$

मिश्र भिन्न (Complex fractions)—जिस भिन्न के अंश और हर भिन्नात्मक होते हैं उसे मिश्र भिन्न (Complex fraction) कहते हैं। जैसे

$$\frac{य}{र}\Big/\frac{र}{य},\ \frac{य}{क}\Big/\frac{क}{ख}$$

उदाहरण १. $\dfrac{\dfrac{क}{क-ख}+\dfrac{ख}{क+ख}}{\dfrac{क}{क+ख}-\dfrac{ख}{क-ख}}$ को सरल करो।

टिप्पणी : ऐसे प्रश्नों के अंश और हर को पृथक्-पृथक् सरल करते हैं तथा फिर अंश को हर से भाग दे देते हैं।

$$\text{अंश}=\frac{क}{क-ख}+\frac{ख}{क+ख}=\frac{क\,(क+ख)+ख\,(क-ख)}{(क-ख)\,(क+ख)}$$

$$=\frac{क^{२}+कख+कख-ख^{२}}{(क-ख)\,(क+ख)}=\frac{क^{२}+२कख-ख^{२}}{(क-ख)\,(क+ख)}$$

$$\text{हर}=\frac{क}{क+ख}-\frac{ख}{क-ख}=\frac{क\,(क-ख)-ख\,(क+ख)}{(क+ख)\,(क-ख)}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{क^२ - कख - कख - ख^२}{(क+ख)\ (क-ख)} = \frac{क^२ - २कख - ख^२}{(क+ख)(क-ख)}$$

$$\therefore \text{ दी हुई भिन्न } = \frac{\dfrac{क^२ + २कख - ख^२}{(क-ख)(क+ख)}}{\dfrac{क^२ - २कख - ख^२}{(क+ख)(क-ख)}}$$

$$= \frac{क^२ + २कख - ख^२}{(क-ख)(क+ख)} \times \frac{(क+ख)(क-ख)}{क^२ - २कख - ख^२}$$

$$= \frac{क^२ + २कख - ख^२}{क^२ - २कख - ख^२}$$ उत्तर

उदाहरण २. $य - \cfrac{१}{य + \cfrac{१}{य - \cfrac{१}{य}}}$ को सरल करो।

टिप्पणी : उपर्युक्त भिन्न को वितत भिन्न (Continued fraction) कहते हैं। इन भिन्नों को नीचे से ऊपर की ओर सरल करते चले जाते हैं।

$$य - \cfrac{१}{य + \cfrac{१}{य - \cfrac{१}{य}}} = य - \cfrac{१}{य + \cfrac{१}{\cfrac{य^२ - १}{य}}}$$

$$= य - \cfrac{१}{य + \cfrac{य}{य^२ - १}} = य - \cfrac{१}{\cfrac{य^३ - य + य}{य^२ - १}}$$

$$= य - \cfrac{१}{\cfrac{य^१}{य^२ - १}} = य - \frac{य^२ - १}{य^३} = \frac{य^४ - य^२ + १}{य^३}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. $\frac{य+क}{य-क}+\frac{य+ख}{य-ख}$ का मान बताओ, जबकि

$$य=\frac{२कख}{क+ख}$$

क्रिया : $\because$ $य=\frac{२कख}{क+ख}$ ...(१)

$\therefore$ $य(क+ख)=२कख$

$$\frac{य+क}{य-क}+\frac{य+ख}{य-ख}$$

$$=\frac{(य+क)(य-ख)+(य+ख)(य-क)}{(य-क)(य-ख)}$$

$$=\frac{य^२+यक-यख-कख+य^२+ख य-कय-कख}{य^२-(क+ख)य+कख}$$

$$=\frac{२य^२-२कख}{य^२-२कख+कख}$$ (१) से,

$$=\frac{२(य^२-कख)}{य^२-कख}=२$$ उत्तर

प्रश्नावली ४२

सरल करो—

१. $\dfrac{\frac{१}{क}+\frac{१}{ख}}{\frac{१}{क}-\frac{१}{ख}}$

२. $\dfrac{\frac{क}{क-ख}-\frac{क}{क+ख}}{\frac{ख}{क-ख}-\frac{ख}{क+ख}}$

३. $\dfrac{\frac{१+क}{१-क}-\frac{२क}{१+क}}{\frac{१-क}{१+क}+\frac{२क}{१-क}}$

४. $\dfrac{\frac{क+य}{क-य}-\frac{क-य}{क+य}}{\frac{क-य}{क+य}+\frac{क+य}{क-य}}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. $\dfrac{\dfrac{१+य}{१-य}-\dfrac{१-य}{१+य}}{\dfrac{१-य}{१+य}+\dfrac{१+य}{१-य}}$

६. $\dfrac{\dfrac{य}{य+क}+\dfrac{क}{य-क}}{\dfrac{य}{य-क}-\dfrac{क}{य+क}}$

७. $\dfrac{१}{य+\dfrac{१}{१+\dfrac{य}{१-य}}}$

८. $\dfrac{१}{२-\dfrac{३}{४+\dfrac{य}{१-य}}}$

निम्नलिखित का मान बताओ—

९. $\dfrac{य+२क}{य-२क}+\dfrac{य+२ख}{य-२ख}$, जबकि $य=\dfrac{४कख}{क+ख}$

१०. $\dfrac{य+र}{१-यर}$, जबकि $य=\dfrac{क+ख}{१-कख}$ और $र=\dfrac{क-ख}{१+कख}$

११. यदि $य+र+ल=०$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{र^२+ल^२-य^२}+\frac{१}{ल^२+य^२-र^२}+\frac{१}{य^२+र^२-ल^२}=०$$

१२. यदि $क+ख+ग=०$ तो सिद्ध करो कि

$$क^२-खग=ख^२-गक=ग^२-कख$$

१३. यदि $\dfrac{य}{ख-ग}=\dfrac{र}{ग-क}=\dfrac{ल}{क-ख}$, तो सिद्ध करो कि

$$य+र+ल=०$$

चक्रीय क्रम की भिन्न

उदाहरण १. $\dfrac{ख+ग}{(क-ख)(क-ग)}+\dfrac{ग+क}{(ख-ग)(ख-क)}$

$+\dfrac{क+ख}{(ग-क)(ग-ख)}$ को सरल करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

टिप्पणी : ऐसी भिन्नों को चक्रीय क्रम की भिन्न कह देते हैं। इन भिन्नों के हरों के गुणनखंडों को चक्रीय क्रम में रख लेते हैं और फिर साधारण रीति से सरल करते हैं।

$$\frac{ख+ग}{(क-ख)(क-ग)}+\frac{ग+क}{(ख-ग)(ख-क)}+\frac{क+ख}{(ग-क)(ग-ख)}$$

$$=-\frac{ख+ग}{(क-ख)(ग-क)}-\frac{ग+क}{(ख-ग)(क-ख)}-\frac{क+ख}{(ग-क)(ख-ग)}$$

$$=\frac{-(ख+ग)(ख-ग)-(ग+क)(ग-क)-(क+ख)(क-ख)}{(क-ख)\ (ख-ग)\ (ग-क)}$$

$$=\frac{-(ख^2-ग^2)-(ग^2-क^2)-(क^2-ख^2)}{(क-ख)(ख-ग)(ग-क)}$$

$$=\frac{-ख^2+ग^2-ग^2+क^2-क^2+ख^2}{(क-ख)(ख-ग)(ग-क)}$$

$$=\frac{0}{(क-ख)(ख-ग)(ग-क)}=0$$ उत्तर

उदाहरण २. $\frac{खग}{(क-ख)(क-ग)}+\frac{कग}{(ख-क)(ख-ग)}$

$+\frac{कख}{(ग-क)(ग-ख)}$ को सरल करो।

दी हुई भिन्न—

$$=-\frac{खग}{(क-ख)\ (ग-क)}-\frac{कग}{(क-ख)(ख-ग)}-\frac{कख}{(ग-क)(ख-ग)}$$

$$=\frac{-खग\ (ख-ग)-कग\ (ग-क)-कख(क-ख)}{(क-ख)\ (ख-ग)\ (ग-क)}$$

अंश $=-ख^2ग+खग^2-कग^2+क^2ग-क^2ख+कख^2$

$=क^2ग-क^2ख-कग^2+कख^2+खग^2-ख^2ग$

$=क^2\ (ग-ख)-क\ (ग^2-ख^2)+खग\ (ग-ख)$

$=(ग-ख)\ \{क^2-क\ (ग+ख)+खग\}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= (\text{ग} - \text{ख})\ (\text{क}^2 - \text{कग} - \text{कख} + \text{खग})$

$= (\text{ग} - \text{ख})\ (\text{खग} - \text{कख} - \text{कग} + \text{क}^2)$

$= (\text{ग} - \text{ख})\ \{\text{ख}\ (\text{ग} - \text{क}) - \text{क}\ (\text{ग} - \text{क})\}$

$= (\text{ग} - \text{ख})\ (\text{ग} - \text{क})\ (\text{ख} - \text{क})$

$= (\text{ख} - \text{ग})\ (\text{ग} - \text{क})\ (\text{क} - \text{ख})$

$\therefore$ दी हुई भिन्न $= \dfrac{(\text{ख} - \text{ग})\ (\text{ग} - \text{क})\ (\text{क} - \text{ख})}{(\text{क} - \text{ख})\ (\text{ख} - \text{ग})\ (\text{ग} - \text{क})} = १$ उत्तर

प्रश्नावली ४३

सरल करो—

१. $\dfrac{१}{(\text{य} - \text{र})(\text{य} - \text{ल})} + \dfrac{१}{(\text{र} - \text{ल})(\text{र} - \text{य})} + \dfrac{१}{(\text{ल} - \text{य})(\text{ल} - \text{र})}$

२. $\dfrac{\text{य}}{(\text{य} - \text{र})(\text{य} - \text{ल})} + \dfrac{\text{र}}{(\text{र} - \text{ल})(\text{र} - \text{य})} + \dfrac{\text{ल}}{(\text{ल} - \text{य})(\text{ल} - \text{र})}$

३. $\dfrac{\text{यक}}{(\text{य} - \text{र})(\text{य} - \text{ल})} + \dfrac{\text{रक}}{(\text{र} - \text{ल})(\text{र} - \text{य})} + \dfrac{\text{लक}}{(\text{ल} - \text{य})(\text{ल} - \text{र})}$

४. $\dfrac{\text{य} + \text{र}}{(\text{ल} - \text{य})(\text{ल} - \text{र})} + \dfrac{\text{य} + \text{ल}}{(\text{र} - \text{य})(\text{र} - \text{ल})} + \dfrac{\text{र} + \text{ल}}{(\text{य} - \text{र})(\text{य} - \text{ल})}$

५. $\dfrac{\text{क}^2}{(\text{क} - \text{ख})(\text{क} - \text{ग})} + \dfrac{\text{ख}^2}{(\text{ख} - \text{ग})(\text{ख} - \text{क})} + \dfrac{\text{ग}^2}{(\text{ग} - \text{क})(\text{ग} - \text{ख})}$

६. $\dfrac{१}{\text{क}(\text{क} - \text{ख})\ (\text{क} - \text{ग})} + \dfrac{१}{\text{ख}(\text{ख} - \text{क})\ (\text{ख} - \text{ग})}$

$+ \dfrac{१}{\text{ग}(\text{ग} - \text{क})(\text{ग} - \text{ख})}$

७. $\dfrac{१}{\text{यल}(\text{र} - \text{य})\ (\text{ल} - \text{य})} + \dfrac{१}{\text{यर}(\text{य} - \text{ल})(\text{र} - \text{ल})}$

$+ \dfrac{१}{\text{यल}(\text{य} - \text{र})(\text{ल} - \text{र})}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. $\frac{\text{ख}-\text{ग}}{(\text{क}+\text{ख})(\text{क}+\text{ग})}+\frac{\text{ग}-\text{क}}{(\text{ख}+\text{ग})\ (\text{ख}+\text{क})}+\frac{\text{क}-\text{ख}}{(\text{ग}+\text{क})(\text{ग}+\text{ख})}$

९. $\frac{\text{खग}}{(\text{क}-\text{ख})(\text{क}-\text{ग})}+\frac{\text{कग}}{(\text{ख}-\text{ग})(\text{ख}-\text{क})}+\frac{\text{कख}}{(\text{ग}-\text{क})(\text{ग}-\text{ख})}$

१०. $\frac{\text{अब}}{(\text{ब}-\text{स})(\text{अ}-\text{स})}+\frac{\text{बस}}{(\text{स}-\text{अ})(\text{ब}-\text{अ})}+\frac{\text{अस}}{(\text{अ}-\text{ब})(\text{स}-\text{ब})}$

११. $\frac{\text{र}-\text{ल}}{\text{य}^{2}-(\text{र}-\text{ल})^{2}}+\frac{\text{ल}-\text{य}}{\text{र}^{2}-(\text{ल}-\text{य})^{2}}+\frac{\text{य}-\text{र}}{\text{ल}^{2}-(\text{य}-\text{र})^{2}}$

१२. $\frac{\text{क}^{2}(\text{ख}-\text{ग})}{(\text{क}+\text{ख})(\text{क}+\text{ग})}+\frac{\text{ख}^{2}(\text{ग}-\text{क})}{(\text{ख}+\text{ग})(\text{ख}+\text{क})}+\frac{\text{ग}^{2}(\text{क}-\text{ख})}{(\text{ग}+\text{क})\ (\text{ग}+\text{ख})}$

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ९

सरल समीकरण
(SIMPLE EQUATION)

अज्ञात राशि—मेज पर १५ रुपये रखे हुए हैं। उनमें से कुछ रुपये मैंने अपनी मुट्ठी में ले लिए। अब मेज पर केवल ७ रुपये शेष हैं। बताओ मेरी मुट्ठी में कितने रुपये हैं ?

स्पष्ट है कि मुट्ठी के रुपये + ७ रुपये = १५ रुपये।

यदि हम इस 'मुट्ठी के रुपये' के स्थान पर कोई बीजीय अक्षर 'य' रख देते हैं तो उपर्युक्त उदाहरण इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

य + ७ = १५, किन्तु ८ + ७ = १५

∴ य = ८ हुआ

बीजीय समता (Algebraical Equality)—हम जानते हैं कि

(य − ३) (य − ५) = य² − ८य + १५ ....(१)

और ऊपर देख चुके हैं कि

य + ७ = १५ ...(२)

ये दोनों ऐसे कथन है जो दो अलग-अलग राशियों की समानता प्रगट करते हैं। अतः

जब दो राशियों अथवा व्यंजकों के मान परस्पर बराबर हों और उनके समत्व को बराबर चिह्न '=' से प्रगट किया गया हो, तो इस प्रकार के निरूपण को **बीजीय समता** कहते हैं।

इनमें बराबर के चिह्नों के दाहिनी ओर व्यंजक अथवा राशि को **दक्षिण पक्ष** (Right hand side) और बायीं ओर के व्यंजक अथवा राशि को **वाम**

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पक्ष (Left hand side) कहते हैं। इस प्रकार (१) और (२) में

$य^2 - ८य + १५$ और १५ दाहिना पक्ष और (य—३) (य—५) और य+७ बायाँ पक्ष है।

सर्वसमिका और समीकरण (Identity and Equation) उपर्युक्त दी हुई समता (१) और (२) में भेद समझना आवश्यक है।

यदि समता (१) में य का मान २ रख दें तो वाम पक्ष = ३ और दक्षिण पक्ष = ३

∴ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

पुनः यदि समता (१) में य का मान ४ लिया जाय, तो प्रतिस्थापन (Substitution) से वाम पक्ष = — १ और दक्षिण पक्ष = — १

∴ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

इसी प्रकार य के और मान प्रस्थापित करके दोनों पक्ष बराबर दिखाये जा सकते हैं।

अतः यदि य के ही मान समता (२) में प्रस्थापित किये जाएँ तो य = ३ रखने से

(२) का वाम पक्ष = १० और दक्षिण पक्ष = १५

अतः दोनों पक्षों के मान बराबर नहीं हैं।

य = ५ प्रस्थापित करने से

(२) का वाम पक्ष = १२ और दक्षिण पक्ष = १५

अतः दोनों पक्षों के मान बराबर नहीं है।

किन्तु यदि य = ८ प्रस्थापित करें तो

(२) का वाम पक्ष = १५ और दक्षिण पक्ष = १५

∴ दोनों पक्षों के मान बराबर हैं।

इसी प्रकार यदि य = १० प्रस्थापित किया जाय तो दोनों पक्ष बराबर नहीं होंगे।

अतः यदि समता (१) में य का संख्यात्मक मान कुछ भी रखें दोनों पक्ष सदैव बराबर रहेंगे। किन्तु समता (२) के लिए यह बात सही नहीं है। य+७ = १५ के दोनों पक्ष केवल तभी बराबर होंगे जबकि य = ८ अन्यथा नहीं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सर्वसमिका (Identity)—**परिभाषा**—ऐसी बीजीय समता (Algebraical Equality) को जिनके दोनों पक्षों के मान अज्ञात अक्षर अथवा अक्षरों के किसी भी मान के लिए परस्पर बराबर हों, **सर्वसमिका** (Identity) कहते हैं।

समीकरण (Equation)—ऐसी बीजीय समता को जिसके दोनों पक्ष अज्ञात अक्षर अथवा अक्षरों के किसी विशेष मान अथवा मानों के लिये आपस में बराबर हों, समीकरण (Equation) कहते हैं।

ऊपर दी हुई बीजीय समताओं में (१) सर्वसमिका है और (२) समीकरण है।

समीकरण में कम से कम एक ऐसी राशि अवश्य होती है जिसका मान पहले से ज्ञात नहीं होता। इस राशि को **अज्ञात राशि** (Unknown quantity) कहते हैं।

समीकरण का हल करना (Solving the Equation)—किसी समीकरण की अज्ञात राशि के निकालने की क्रिया को समीकरण का हल करना कहते हैं।

समीकरण का मूल (Root of an Equation)—किसी समीकरण की अज्ञात राशि के उस मान को जिससे वह समीकरण सन्तुष्ट हो जाती है **समीकरण का मूल** कहते हैं।

सरल समीकरण (Simple Equation) **वह समीकरण है जिसमें अथवा जिसके सरल करने पर उसमें अज्ञात राशि का घातांक एक होता है। जैसे—**

$$४य - ३ = ३य - ४ \text{ और } (य - २)(य + ३) = य^२ + १$$

समीकरण तथा भौतिक तुला—समीकरण एक भौतिक तुला के समान है। समीकरण में दोनों पक्ष बराबर के चिह्न '=' से जुड़े होते हैं और भौतिक तुला में दोनों पलड़े तुला-दण्ड (Beam) से जुड़े रहते हैं।

माना बायें पलड़े में डेकाग्राम (Decagram) के ८ बाँट रखे हैं और दायें पलड़े में एक-एक डेकाग्राम की ८ गोलियाँ रखी हैं, जिससे तुला दण्ड क्षैतिज धरातल में है। यदि बायें पलड़े में डेकाग्राम के दो बाँट और रख दिये जाते हैं, तो तुला-दण्ड को क्षैतिज रखने के लिए दायें पलड़े में भी दो गोलियाँ

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

और रखी जावेंगी। यदि बायें पलड़े में से डेकाग्राम के दो बाँट उतार लिये जाते हैं तो तुला दण्ड को क्षैतिज रखने के लिए दायें पलड़े में क्या करना होगा ?

यदि बायें पलड़े में बाँट दुगुने कर दिये जाते हैं तो तुला-दण्ड को क्षैतिज रखने के लिए दायें पलड़े में गोलियाँ भी दुगुनी करनी पड़ेंगी।

यदि बायें पलड़े में बाँट आधे कर दिये जाते हैं तो दायें पलड़े में गोलियाँ भी आधी करनी पड़ेंगी जिससे तुला-दण्ड क्षैतिज रह सके।

इसी प्रकार यदि समीकरण के एक पक्ष में कोई राशि कम करनी हो अथवा बढ़ानी हो तो दोनों पक्षों को समान बनाये रखने के लिए दूसरे पक्ष में उसी प्रकार के परिवर्तन करने पड़ेंगे।

समीकरण को हल करने की विधि इन्हीं चार स्वयंतथ्यों (Axioms) पर आधारित है जो निम्न प्रकार लिखे जाते हैं :—

(१) यदि समान राशियों में समान राशियाँ जोड़ दी जावें तो योगफल भी समान होगा। जैसे,

यदि $य = ५$, तो $य + २ = ५ + २$

(२) समान राशियों में से समान राशियाँ घटाने पर शेषफल समान होगा। जैसे,

यदि $य = ५$, तो $य - २ = ५ - २$

(३) समान राशियों को समान राशियों से गुणा करने पर गुणनफल समान होगा। जैसे,

यदि $य = ५$, तो $२ \times य = ५ \times २$

(४) समान राशियों को समान राशियों से भाग देने पर भजनफल समान होगा। जैसे,

यदि $य = ५$, तो $\frac{य}{३} = \frac{५}{३}$

टिप्पणी : इस सम्बन्ध में यह याद रखना चाहिये कि शून्य से गुणा अथवा भाग नहीं किया जा सकता क्योंकि उस अवस्था में कोई भी संख्या किसी भी संख्या के बराबर की जा सकती है, जो असम्भव है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पक्षांतरण (Iransposition)—निम्न समीकरण पर विचार करो :—

य + ३ = १० ...(१)

'य' का मान ज्ञात करने के लिये यह आवश्यक है कि एक पक्ष में केवल अज्ञात पद और दूसरे पक्ष में सब ज्ञात पद रहें।

ऐसा करने के लिये वाम पक्ष में से ३ घटाना चाहिये। अब दोनों पक्षों को समान रखने के लिये यह आवश्यक है कि दक्षिण पक्ष में से भी ३ घटाया जावे।

∴ य + ३ — ३ = १० — ३

अर्थात् य = १० — ३ ....(२)

समीकरण (१) और (२) की तुलना करने पर यह प्रकट होता है कि वाम पक्ष में से + ३ हटकर दक्षिण पक्ष में — ३ हो गया है।

अब निम्न समीकरण पर विचार करो :—

य — ३ = १० ...(३)

वाम पक्ष में केवल अज्ञात पद 'य' रखने के लिये दोनों पक्षों में ३ जोड़ा जाना चाहिये।

∴ य — ३ + ३ = १० + ३

अर्थात् य = १० + ३ ...(४)

समीकरण (३) और (४) से यह प्रकट होता है कि वाम पक्ष से — ३ हट कर दक्षिण पक्ष में + ३ आ गया है।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में कोई भी पद केवल चिह्न बदलकर ले जाया जा सकता है। इस क्रिया को पक्षान्तरण कहते हैं।

अतः पक्षान्तरण (Transposition) **वह क्रिया है जिससे समीकरण में किसी पद को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में केवल चिह्न बदलकर अर्थात् धन से ऋण और ऋण से धन में बदल कर ले जाते हैं।**

टिप्पणी—(१) वास्तव में हम समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में कोई पद नहीं ले जाते हैं। हम तो केवल स्वयंतथ्यों (१) और (२) के अनुसार

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

क्रिया करते हैं, परन्तु प्रकट ऐसा होता है जैसे हम कोई पद एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाते हों।

(२) कोई भी पद जो समीकरण के दोनों पक्षों में समान चिह्न के साथ हो, समीकरण के दोनों पक्षों से हटाया जा सकता है।

(३) समीकरण के वाम पक्ष के सभी पदों को दक्षिण पक्ष में और दक्षिण पक्ष के सभी पदों को वाम पक्ष में रखने से समीकरण में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

(४) समीकरण को हल करते समय साधारणतया अज्ञात राशियों वाले पदों को वाम पक्ष में और शेष पदों को दक्षिण पक्ष में रख लेते हैं।

उदाहरण १. ५य—३=८य—१८ को हल करो।

क्रिया : ५य—३=८य—१८

५य—८य=—१८+३

अर्थात् —३य=—१५

$\therefore$ य= $\frac{-१५}{-३}$=५ उत्तर

उत्तर की जाँच (Verification)—यदि समीकरण में अज्ञात राशि के स्थान पर उसका मान रखने पर दोनों पक्षों का मान समान आता है तो उत्तर ठीक है अन्यथा नहीं। जैसे उदाहरण (२) की समीकरण में य के स्थान पर ५ रखने से,

वाम पक्ष=५×५—३=२५—३=२२

और दक्षिण पक्ष=८×५—१८=४०—१८=२२

$\because$ दोनों पक्षों का मान समान है, $\therefore$ उत्तर ठीक है।

उदाहरण २. ३य—१३(२य—१३)=४(य—५) को हल करो।

क्रिया : ३य—१३(२य—१३)=४(य—५)

अर्थात्, ३य—२६य+१६९=४य—२०

अर्थात्, ३य—२६य—४य=—२०—१६९

अर्थात्, —२७य=—१८९

$\therefore$ य= $\frac{-१८९}{-२७}$=७। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. $(य+४)(य+५)-(य+२)(य+३)=य-१$ का हल करो।

क्रिया : $(य+४)(य+५)-(य+२)(य+३)=य-१$

अर्थात्, $य^२+९य+२०-(य^२+५य+६)=य-१$

अर्थात्, $य^२+९य+२०-य^२-५य-६=य-१$

अर्थात्, $य^२+९य-य^२-५य-य=-१-२०+६$

अर्थात्, $३य=-१५$

$\therefore \quad य=\frac{-१५}{३}=-५$ उत्तर

टिप्पणी : समीकरण की किसी पंक्ति के प्रारम्भ में बराबर के चिह्न '=' का प्रयोग नहीं करना चाहिये।

प्रश्नावली ४४

बताओ निम्न में कौनसी सर्वसमिका है और कौनसी समीकरण :

१. $२य-४=य-१$ २. $य^२+२य+१=(य+१)^२$

३. $(य-३)(य+५)=य^२+२य-१५$

४. $४+३य=२य+६$ ५. $२य+६=५य-३य+६$

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

६. $१२य=९६$ ७. $-५य=१५$

८. $७य=-१४$ ९. $-४य=-१२$

१०. $य+४=९$ ११. $य-क=०$

१२. $४य-१६=१२$ १३. $५य+१६=२य+२८$

१४. $२य+४+३य=७य+८$

१५. $१७य-३+२य=७य+१८+५य$

१६. $७(२य-४)+१६=३(य+५)-५$

१७. $य-३(य-२)-२(य+१)=३य(य-२)-(२य-५)$

१८. $२य-[३-\{४य+(य-१)\}-५]=-८$

१९. $(य+३)(य-६)=(य-५)(य-६)-२०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२०. $(२य-१)(य-२)=२(य+३)(य+१)$

२१. $४(२य-१)-३(३य+१)=९$

२२. $४(य-२)=०$ २३. $६(य-क)=०$

२४. $(२य+३)^२-(य-२)^२=३य^२+२$

२५. $(य+१)^२+(य-१)^२-४=२य^२-१-य$

२६. $१६-३(य-१)(य+२)=५०-३(य+१)^२$

२७. $(य-३)^२-(य+१)^२=८$

२८. $३(य^२-१४)=य(+१)^२+(य-२)^२+(य-५)^२$

२९. य के किस मान के लिये $१४(य-४)+३(य+५)$ और $६(७-२य)+४$ बराबर हो जावेंगे।

३०. य के किस मान के लिये व्यंजक $४(य+५)^२-(२य+१)^२-३(य-५)-१८०$ का मान शून्य हो जावेगा।

भिन्न वाले समीकरण (Equations involving fractions)—भिन्न वाले समीकरणों को हल करने के लिये सबसे पहले यह आवश्यक है कि उसके भिन्नात्मक रूप को दूर करना चाहिये। इसके लिये समीकरण के दोनों पक्षों के सब हरों का लघुत्तम समापवर्त्य लेकर उससे दोनों पक्षों के प्रत्येक पद को गुणा करते हैं जिससे भिन्नों के हर कट जावें। इसके पश्चात् पहले की भाँति समीकरण को हल कर लेते हैं।

पहले हम ऐसी समीकरणों को हल करेंगे जिनके पदों के हर संख्यात्मक हों।

उदाहरण १. $\frac{४य}{७}-\frac{य}{३}=\frac{य}{९}+\frac{६}{७}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{४य}{७}-\frac{य}{३}=\frac{य}{९}+\frac{६}{७}$

७, ३, ९ तथा ७ के ल० स० प० ६३ से दोनों पक्षों को गुणा करके,

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३६य − २१य = ७य + ५४

अर्थात्, ३६य − २१य − ७य = ५४

अर्थात्, ८य = ५४

$\therefore \quad य = \frac{५४}{८} = \frac{२७}{४} = ६\frac{३}{४}$ उत्तर

उदाहरण २. $\frac{य+१}{२} + \frac{य+३}{३} + = ९ - \frac{य+१}{३}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{य+१}{२} + \frac{य+३}{५} = ९ - \frac{य+१}{३}$

२, ५ और ३ के ल० स० प० ३० से दोनों पक्षों को गुणा करके,

१५य + १५ + ६य + १८ = २७० − १०य − १०

अर्थात्, १५य + ६य + १०य = २७० − १० − १५ − १८

अर्थात्, ३१य = ५२७

$\therefore \quad य = \frac{५२७}{३१} = १७$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{४य}{५} = \frac{३६}{७}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{४य}{५} = \frac{३६}{७}$ ...(१)

५ और ७ के ल० स० प० अर्थात् ३५ से दोनों पक्षों को गुणा करके,

४य × ७ = ३६ × ५ ...(२)

अर्थात् २८य = १८०

$\therefore \quad य = \frac{१८०}{२८} = \frac{४५}{७} = ६\frac{३}{७}$ उत्तर

वज्रगुणन (Cross multiplication)—उदाहरण ३ में समीकरण (१) और (२) पर विचार करो। समीकरण (१) के वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष में केवल एक-एक पद हैं। समीकरण (२) से स्पष्ट है कि समीकरण (१) के

वाम पक्ष का अंश × दक्षिण पक्ष का हर

= दक्षिण पक्ष का अंश × वाम पक्ष का हर

इसको वज्रगुणन की क्रिया कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः जब किसी समीकरण के दोनों पक्षों में केवल एक-एक पद हो तो उसको हल करने के लिये उसके पदों के हरों का ल० स० प० ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है बल्कि उपर्युक्त सिद्धान्त अर्थात् वाम पक्ष का अंश × दक्षिण पक्ष का हर = दक्षिण पक्ष का अंश × वाम पक्ष के हर से हल कर लेते हैं। इस क्रिया को वज्रगुणन (Cross multiplication) की क्रिया कहते हैं।

उदाहरण ४. $\frac{३य+२}{५}=\frac{य+७}{१०}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{३य+२}{५}=\frac{य+७}{१०}$

वज्रगुणन की रीति से,

$$१०(३य+२)=५(य+७)$$

अर्थात्, $३०य+२०=५य+३५$

अर्थात्, $३०य-५य=३५-२०$

अर्थात्, $२५य=१५$

$\therefore \quad य=\frac{१५}{२५}=\frac{३}{५}$ उत्तर

प्रश्नावली ४५

निम्न को हल करो :—

१. $\frac{य}{२}+\frac{य}{४}=२$ २. $\frac{य}{३}-\frac{य}{६}=३$

३. $\frac{य}{६}+\frac{य}{४}+\frac{य}{८}=\frac{य}{२४}+६$

४. $\frac{य}{३}-\frac{१}{६}+\frac{य}{२}+\frac{१}{६}=\frac{य}{४}+१$

५. $३य-\frac{३य}{२}=१६\frac{१}{२}-\frac{य}{३}$

६. $\frac{२य+३}{४}-\frac{३य-२}{४}=४\frac{१}{४}$

७. $\frac{१-४य}{५}+\frac{५}{९}=य+\frac{३-७य}{४}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. $\frac{य+३}{८}-\frac{य-३}{१०}=\frac{य+५}{६}-\frac{य-७}{३}$

९. $\frac{य-३}{४}-\frac{२(य-७)}{३}+\frac{य+९}{१२}=०$

१०. $\frac{२य-१}{३}-\frac{य+३}{२}=\frac{५}{३}-\frac{३य-४}{४}$

११. $\frac{य+४}{५}-\frac{७य+६}{१०}=२य-११$

१२. $१-\frac{३य+७}{८}=\frac{य-२}{६}-\frac{२य+७}{१२}$

१३. $\frac{य+१०}{३}-२\frac{३}{४}-\frac{य}{४}-\frac{३य}{८}=\frac{य-२}{३}-(य-१)$

१४. $\frac{४(२य+७)}{५}-\frac{७य-५}{८}=३(७-४य)$

१५ $\frac{३य}{४}+\frac{१-२य}{५}=२\frac{१}{५}-\frac{य-\frac{१}{४}}{३}$

१६. $\frac{य-१}{२}+\frac{य+\frac{३}{१५}}{४}+\frac{य-३}{४}=\frac{११}{५}$

१७. $२य-\frac{१}{३}(य+१४)=१२$

१८. $\frac{१}{३}(य+२)+\frac{१}{४}(य+३)=१६-\frac{१}{२}(य+१)$

१९. $य-\left(३य-\frac{२य-५}{१०}\right)=\frac{१}{६}(२य-५७)-\frac{५}{३}$

२०. $\frac{७य+९}{४}-\left\{य-\frac{२य-१}{९}\right\}=७$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. $\frac{१}{२}(५य+३)-\frac{१}{३}(१-२य)+२=०$

२२. $\frac{य+५}{६}-\left(\frac{१४-य}{२}-\frac{१}{४}\right)=\frac{२य-७}{१२}$

२३. $\frac{५य}{३}-\frac{य-२}{४}=२\frac{१}{४}-\frac{१}{२}\left(य-\frac{२य-१}{३}\right)$

२४. $\frac{३य}{४}=\frac{६}{७}$ २५. $\frac{य}{५}=६$

२६. $\frac{२य-१}{५}=३$ २७. $\frac{४य-३}{३}=\frac{५}{८}$

२८. $\frac{५य-२}{४}=\frac{३य+२}{२}$ २९. $\frac{४(य-१)}{१३}=\frac{३य-५}{२६}$

३०. $\frac{९य-२}{६\frac{१}{४}}=\frac{४य+४}{३\frac{५}{७}}$ ३१. $\frac{य+१}{२\frac{१}{३}}=\frac{२य-१}{३\frac{१}{३}}$

भिन्न वाले समीकरण जिसके हर में अज्ञात राशि हो—

उदाहरण १. $\frac{५}{य-३}=\frac{७}{य-९}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{५}{य-३}=\frac{७}{य-५}$

वज्रगुणन से,

$$५(य-५)=७(य-३)$$

अर्थात्, $५य-२५=७य-२१$

अर्थात्, $५य-७य=-२१+२५$; अर्थात् $-२य=४$

$\therefore \quad य=\frac{४}{-२}=-२$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $\frac{३}{य+३}+\frac{३}{य+५}=\frac{७}{य+११}$ को हल करो।

टिप्पणी : इस समीकरण में तीन पद हैं जिनमें से एक पद का अंश दूसरे दो पदों के अंशों के बीजीय योगफल के बराबर हैं। इस पद को ऐसे दो पदों में विभक्त करते हैं जिनके अंश दूसरे दोनों पदों के अंशों के बराबर हों। इस प्रकार समीकरण में चार पद हो जाते हैं। ऐसे दो पदों को जिनके अंश समान हैं एक पक्ष में और शेष दूसरे दोनों पदों (जिनके भी अंश समान हैं) को दूसरे पक्ष में रखते हैं। इस प्रकार विभक्त करने से समीकरण का हल कुछ सुविधाजनक हो जाता है।

क्रिया : $\frac{३}{य+३}+\frac{४}{य+५}=\frac{७}{य+११}$

अर्थात्, $\frac{३}{य+३}+\frac{४}{य+५}=\frac{३}{य+११}+\frac{४}{य+११}$

अर्थात्, $\frac{३}{य+३}-\frac{३}{य+११}=\frac{४}{य+११}-\frac{४}{य+५}$

अर्थात्, $\frac{३(य+११)-३(य+३)}{(य+३)(य+११)}=\frac{४(य+५)-४(य+११)}{(य+११)(य+५)}$

अर्थात्, $\frac{३य+३३-३य-९}{(य+३)(य+११)}=\frac{४य+२०-४य-४४}{(य+११)(य+५)}$

अर्थात्, $\frac{२४}{(य+३)(य+११)}=\frac{-२४}{(य+११)(य+५)}$

अर्थात्, $\frac{१}{(य+३)(य+११)}=\frac{-१}{(य+११)(य+५)}$

(२४ से भाग करके)

$\frac{१}{य+३}=\frac{-१}{य+५}$, (य+११ से गुणा करके)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$य+५=-१(य+३)$$

अर्थात्, $य+५=-य-३$

अर्थात्, $य+य=-३-५$; अर्थात्, $२य=-८$

$$\therefore \quad य=\frac{-८}{२}=-४$$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{१}{य-८}+\frac{१}{य-९}=\frac{१}{य-१२}+\frac{१}{य-५}$

को हल करो।

क्रिया : $\frac{१}{य-८}+\frac{१}{य-९}=\frac{१}{य-१२}+\frac{१}{य-५}$

अर्थात्, $\frac{य-९+य-८}{(य-८)(य-९)}=\frac{य-५+य-१२}{(य-१२)(य-५)}$

अर्थात्, $\frac{२य-१७}{य^२-१७य+७२}=\frac{२य-१७}{य^२-१७य+६०}$

दोनों पक्षों को २य—१७ से भाग देकर

$$\frac{१}{य^२-१७य+७२}=\frac{१}{य^२-१७य+६०}$$

अर्थात्, $य^२-१७य+६०=य^२-१७य+७२$, (वज्रगुणन से)

अर्थात्, $६०=७२$, जो असम्भव है।

टिप्पणी : इस असम्भव बात के प्रदर्शन को हेत्वाभास (Fallacy) कहते हैं।

यदि २य—१७ से दोनों पक्षों को भाग देने के बजाय वज्रगुणा की क्रिया करते हो तो

$$(२य-१७)(य^२-१७य+६०)$$
$$=(२य-१७)(य^२-१७य+७२)$$

अर्थात्, $(२य-१७)(य^२-१७य+६०)$
$$-(२य-१७)(य^२-१७य+७२)=०$$

अर्थात्, $(२य-१७)(य^२-१७य+६०-य^२+१७य-७२)=०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $(२य-१७)(-१२)=०$

अर्थात्, $२य-१७=०$; अर्थात्, $२य=१७$

अर्थात, $य=\frac{१७}{२}=८\frac{१}{२}$ उत्तर

टिप्पणी : (१) किसी सरल समीकरण को ऐसे समापवर्तक (common factor) से जिसमें अज्ञात राशि हो भाग नहीं करना चाहिए।

(२) यदि किसी सरल समीकरण में कोई ऐसा समापवर्तक हो जिसमें अज्ञात राशि हो तो उस समापवर्तक को शून्य के बराबर मानकर अज्ञात राशि का अभीष्ट मान ज्ञात किया जा सकता है। जैसे

$$२य-१७=०$$

$$\therefore \quad य=\frac{१७}{२}=८\frac{१}{२}।$$

प्रश्नावली ४६

हल करो :—

१. $\frac{४}{५य-३}=\frac{३}{२य+३}$

२. $\frac{३}{४य-३}=\frac{२}{३य-५}$

३. $\frac{१}{य^२+९य+२०}=\frac{१}{य^२+११य+२८}$

४. $\frac{१}{(य+२)(य+३)}=\frac{१}{(य+४)(य+५)}$

५. $\frac{१}{य+३}+\frac{२}{य+५}=\frac{३}{य+११}$

६. $\frac{३}{य-२}+\frac{५}{य-६}=\frac{८}{य+३}$

७. $\frac{९}{य+१}=\frac{४}{य-३}+\frac{५}{य+४}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. $\frac{५}{य+३}-\frac{२}{य+५}=\frac{३}{य+४}$

९. $\frac{१}{य-१}+\frac{२}{य-२}=\frac{३}{य-३}$

१०. $\frac{१}{य-१}+\frac{१}{य-२}=\frac{२}{य}$

११. $\frac{८}{२य-१}+\frac{९}{३य-२}=\frac{७}{य+१}$

१२. $\frac{१}{य-१}-\frac{२}{य+७}=\frac{१}{७(य-१)}$

१३. $\frac{६}{३य+४}=\frac{२}{५(३य+४)}+\frac{४}{२य+३}$

१४. $\frac{१२}{३य-८}-\frac{२०}{४य-१३}+\frac{१}{य+९}=०$

१५. $\frac{१}{य+१}-\frac{१}{य+२}=\frac{१}{य+३}-\frac{१}{य+४}$

१६. $\frac{१}{य+३}+\frac{१}{य+७}=\frac{१}{य+१}+\frac{१}{य+९}$

१७. $\frac{१}{य-१}+\frac{१}{य+८}=\frac{१}{य}+\frac{१}{य+७}$

१८. $\frac{२}{२य-७}-\frac{३}{९य-१५}=\frac{५}{१०य-३५}\quad\frac{३}{३य-५}$

१९. $\frac{१}{य-६}+\frac{२}{य+३}+\frac{३}{य-२}=\frac{६}{य-१}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२०. $\frac{१}{(य-२)(य-३)}+\frac{१}{(य-३)(य-१)}$

$+\frac{१}{(य-१)(य-२)}=०$

२१. $\frac{१}{(य+१)(य+२)}+\frac{१}{(य+१)(य+३)}$

$=\frac{१}{(य+१)(य+४)}+\frac{१}{(य+२)(य+३)}$

भिन्न वाले समीकरण जिनके अंश और हर दोनों में अज्ञात राशि हो

उदाहरण १. $\frac{य+१}{२य-१}=\frac{य-३}{२य-८}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{य+१}{२य-१}=\frac{य-३}{२य-८}$

$(य+१)(२य-८)=(य-३)(२य-१)$

अर्थात्, $२य^२-६य-८=२य^२-७य+३$

अर्थात्, $२य^२-६य-२य^२+७य=३+८$

अर्थात्, $य=११$ **उत्तर**

उदाहरण २. $\frac{५य-१७}{१३-४य}+\frac{२य-११}{१४}=\frac{२३}{४२}$

$+\frac{३य-७}{२१}$ को हल करो।

उन पदों को एक पक्ष में रखकर जिनके हर संख्यात्मक हैं

$\frac{५य-१७}{१३-४य}=\frac{२३}{४२}+\frac{३य-७}{२१}-\frac{२य-११}{१४}$

अर्थात्, $\frac{५य-१७}{१३-४य}=\frac{२३+६य-१४-६य+३३}{४२}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $\frac{५य-१७}{१३-४य}=\frac{४२}{४२}$

अर्थात्, $\frac{५य-१७}{१३-४य}=१$

अर्थात्, $५य-१७=१३-४य$

अर्थात्, $५य+४य=१३+१७$; अर्थात्, $९य=३०$

$\therefore \quad य=\frac{३०}{९}=\frac{१०}{३}=३\frac{१}{३}$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{३य-१}{य+१}+\frac{२य+१}{य-१}=५$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{३य-१}{य+१}+\frac{२य+१}{य-१}=५$

प्रत्येक पद के अंश को उसके हर से भाग करके,

$$३-\frac{४}{य+१}+२+\frac{३}{य-१}=५$$

अर्थात्, $\frac{३}{य-१}-\frac{४}{य+१}=०$

अर्थात्, $\frac{३}{य-१}=\frac{४}{य+१}$

अर्थात, $३(य+१)=४(य-१)$

अर्थात्, $३य+३=४य-४$

अर्थात्, $३य-४य=-४-३$; अर्थात्, $-य=-७$

$\therefore \quad य=\frac{-७}{-१}=७$ उत्तर

उदाहरण ४. $\frac{य}{य-२}-\frac{य-८}{य-६}=\frac{य+१}{य-१}-\frac{य-९}{य-७}$

को हल करो।

क्रिया : $\frac{य}{य-२}-\frac{य-८}{य-६}=\frac{य+१}{य-१}-\frac{य-९}{य-७}$.

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रत्येक पद के अंश को उसके हर से भाग करके,

$$१+\frac{२}{य-२}-\left\{१-\frac{२}{य-६}\right\}=१+\frac{२}{य-१}-\left\{१-\frac{२}{य-७}\right\}$$

अर्थात्, $$१+\frac{२}{य-२}-१+\frac{२}{य-६}=१+\frac{२}{य-१}-१+\frac{२}{य-७}$$

अर्थात्, $$\frac{२}{य-२}+\frac{२}{य-६}=\frac{२}{य-१}+\frac{२}{य-७}$$

अर्थात्, $$\frac{१}{य-२}+\frac{१}{य-६}=\frac{१}{य-१}+\frac{१}{य-७}$$

अर्थात्, $$\frac{य-६+य-२}{(य-२)\ (य-६)}=\frac{य-७+य-१}{(य-१)\ य-७)}$$

अर्थात्, $$\frac{२य-८}{(य-२)\ (य-६)}=\frac{२य-८}{(य-१)\ (य-७)}$$

दोनों पक्षों का समापवर्तक २य—८ है। इसको शून्य के बराबर रखकर,

$\therefore$ २य—८=०; या, २य=८

$\therefore$ $य=\frac{८}{२}=४$। उत्तर

प्रश्नावली ४७

हल करो :—

१. $\frac{य+५}{२य+७}=\frac{४य-४}{८य+११}$

२. $\frac{२य+१}{३य+१}=\frac{१०य-१}{१५य}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $\frac{३य}{५य-१}=\frac{६य+१}{१०य}$

४. $\frac{५य+४}{११}-\frac{१०य}{२०-२१य}=\frac{१०य+९}{२२}$

५. $\frac{९१य-२१}{५६}+\frac{२४य-९३}{३५य-१३८}=\frac{१३य+९}{८}$

६. $\frac{६य+१}{१५}-\frac{२य-४}{७य-१६}=\frac{२य-१}{५}$

७. $\frac{२य-५}{५}+\frac{य-३}{२य-१५}=\frac{४य-३}{१०}-\frac{१}{१०}$

८. $\frac{३य+१}{य-१}-\frac{य+४}{य-२}=२$

९. $\frac{२य-१}{य-२}-\frac{य-१}{य+१}=१$

१०. $\frac{२(२य-३)}{य-६}+\frac{३}{३-य}=४$

११. $\frac{य-२}{य-५}+\frac{य+१}{य-३}+\frac{य-१४}{य-७}=३$

१२. $\frac{२य-१}{य-१}+\frac{३य-४}{य-२}=\frac{५य-१२}{य-३}$

१३. $\frac{य^२+३य+५}{य+१}+\frac{य^२+५य+१०}{य+२}=\frac{२य^२+११य+१२}{य+३}$

१४. $\frac{य-२}{य-३}+\frac{य-३}{य-४}=\frac{य-१}{य-२}+\frac{य-४}{य-५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१५. $\frac{२य-९}{य-५}+\frac{५य-३४}{य-७}=\frac{३य-८}{य-३}+\frac{४य-३५}{य-९}$

१६. $\frac{य+१}{य+२}-\frac{य+२}{य+३}=\frac{य+४}{य+५}-\frac{य+५}{य+६}$

१७. $\frac{य-४}{य-५}-\frac{य-५}{य-६}=\frac{य-७}{य-८}-\frac{य-८}{य-९}$

१८. $\frac{१}{य-१}+\frac{३}{य+३}=\frac{४}{य^{२}+२य-३}$

विविध प्रश्न

उदाहरण १. $\frac{(य+७)(य+८)}{(य+६)(य+१३)}=\frac{य+१}{य+१९}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{(य+७)(य+८)}{(य+६)(य+१३)}=\frac{य+१५}{य+१९}$

दोनों पक्षों को य+१३ से गुणा करके,

$$\frac{(य+७)(य+८)}{य+६}=\frac{(य+१५)(य+१३)}{य+१९}$$

अर्थात्, $\frac{य^{२}+१५य+५६}{य+६}=\frac{य^{२}+२८य+१९५}{य+१९}$

अर्थात्, $य+९+\frac{२}{य+६}=य+९+\frac{२४}{य+१९}$

अर्थात् $\frac{२}{य+६}=\frac{२४}{य+१९}$

अर्थात्, $\frac{१}{य+६}=\frac{१२}{य+१९}$

अर्थात्, य+१९=१२य+७२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $य - १२य = ७२ - १९$; अर्थात्, $-११य = ५३$

$\therefore\ य = -\frac{५३}{११}$ उत्त

उदाहरण २. $\left(\frac{य+२}{य+१}\right)^{२} = \frac{य+३}{य+५}$ को हल करो।

क्रिया : $\left(\frac{य+२}{य-३}\right)^{२} = \frac{य+३}{य+५}$

अर्थात्, $\left(१ - \frac{१}{य+३}\right)^{२} = १ - \frac{२}{य+५}$

अर्थात्, $१ - \frac{२}{य+३} + \frac{१}{(य+३)^{२}} = १ - \frac{२}{य+५}$

अर्थात्, $\frac{२}{य+३} + \frac{१}{(य+३)^{२}} = -\frac{२}{य+५}$

अर्थात्, $\frac{१}{(य+३)^{२}} = \frac{२}{य+३} - \frac{२}{य+५}$

अर्थात्, $\frac{१}{(य+३)^{२}} = \frac{२य+१०-२य-६}{(य+३)\ (य+५)}$

अर्थात्, $\frac{१}{(य+३)^{२}} = \frac{४}{(य+३)(य+५)}$

अर्थात्, $\frac{१}{य+३} = \frac{४}{य+५}$ (दोनों पक्षों को $य+३$ से गुणा करके)

अर्थात्, $य+५ = ४य+१२$

अर्थात्, $य - ४य = १२ - ५$; अर्थात्, $-३य = ७$

$\therefore\ य = -\frac{७}{३} = -२\ \frac{१}{३}$ उत्त

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. $८\left(\frac{१-य}{१+य}\right)^{२}=\frac{१+य}{१-य}$ को हल करो।

क्रिया : $८\left(\frac{१-य}{१+य}\right)^{२}=\frac{१+य}{१-य}$

दोनों पक्षों को $\frac{१-य}{१+य}$ से गुणा करके,

$$८\left(\frac{१-य}{१+य}\right)^{३}=१$$

अर्थात्, $\left(\frac{१-य}{१+य}\right)^{३}=\frac{१}{८}$

अर्थात्, $\frac{१-य}{१+य}=\frac{१}{२}$

अर्थात्, $२-२य=१+य$

अर्थात्, $-२य-य=१-२$; अर्थात्, $-३य=-१$

$\therefore \quad य=\frac{-१}{-३}=\frac{१}{३}$ उत्तर

प्रश्नावली ४८

हल करो :—

१. $\frac{(य+२)(य+३)}{(य+५)(य-१)}=\frac{य+८}{य+७}$

२. $\frac{(य+१)(य+२)}{(य+३)(य+४)}=\frac{य+५}{य+९}$

३. $\frac{(य+५)(य-२)}{(य+३)(य+१)}=\frac{य+४}{य+५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४. $\left(\frac{य+२}{य+१}\right)^{२}=\frac{य+५}{य+३}$,

५. $\left(\frac{य+५}{य-३}\right)^{२}=\frac{य+८}{य-८}$

६. $\left(\frac{य-३}{य+४}\right)^{२}=\frac{य-५}{य+९}$, ७. $२७\left(\frac{य-१}{य+१}\right)^{२}=\frac{य+१}{य-१}$

८. $१६\left(\frac{य+२}{य-१}\right)=\frac{य-१}{य+२}$

९. $८१\left(\frac{१-२य}{१+२य}\right)=\frac{१+२य}{१-२य}$

दशमलव भिन्नों वाली समीकरण

इन समीकरणों को भी साधारण रीति से हल किया जाता है। यदि आवश्यकता हो तो कहीं-कहीं दशमलव भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदल लिया जाता है। कहीं-कहीं ऐसा भी करते हैं कि दोनों पक्षों को १० अथवा १० के किसी घात से गुणा कर देते हैं जिससे दशमलव भिन्न हट जावें।

उदाहरण १. $\frac{य+·७५}{१·५}-\frac{य-·३५}{४·५}=१·८$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{य+·७५}{१·५}-\frac{य-·३५}{४·५}=१·८$

दोनों पक्षों को ४·५ से गुणा करके,

$$३य+२·२५-य+·३५=८·१०$$

अर्थात्, $२य=८·१०-२·२५-·३५=५·५$

$$\therefore\ य=\frac{५·५}{२}=२·७५$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $\frac{२य-३}{·३य-·४}=\frac{·४य-·६}{·०६य-·०७}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{२य-३}{·३य-·४}=\frac{·४य-·६}{·०६य-·०७}$

बायें पक्ष के अंश तथा हर को १० से और दायें पक्ष के अंश और हल को १०० से गुणा करने पर,

$$\frac{१०(२य-३)}{३य-४}=\frac{१०य(४य-६)}{६य-७}$$

अर्थात्, $\frac{२य-३}{३य-४}=\frac{४य-६}{६य-७}$

अर्थात्, $(२य-३)(६य-७)=(४य-६)(३य-४)$

अर्थात्, $१२य^२-३२य+२१=१२य^२-३४य+२४$

अर्थात्, $१२य^२-३२य-१२य^२+३४य=२४-२१$

$२य=३$

$\therefore य=\frac{३}{२}=१·५$ उत्तर

प्रश्नावली ४९

हल करो—

१. $०·३य-२·५=०·१य-१·५$

२. $०·०४य+०·२(२य-१)+२य=०·३(०·३-य)$

३. $१·२य-०·४य=८·९+\frac{·१८य-·०५}{·५}$

४. $\frac{य}{·५}-\frac{१}{·०५}+\frac{य}{·००५}=\frac{१}{·०००५}$

५. $\frac{य}{०·५}०·४६=\frac{य}{०·७५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

६. $\frac{\text{०·०६य}-\text{·१८}}{\text{·९}}+\text{·१५य}=\text{१·८}-\frac{\text{·१३५य}-\text{·२२५}}{\text{·६}}$

७. $\frac{\text{२य}-\text{१५}}{\text{२·५}}-\text{·२}=\frac{\text{३य}-\text{२२}}{\text{१२·५}}$

८. $\frac{\text{य}-\text{४}}{\text{·६२५}}=\frac{\text{य}-\text{२}}{\text{·५}}-\text{५·६}$

९. $\text{१·२य}-\frac{\text{·१८य}-\text{·०२५}}{\text{·५}}=\text{·४य}+\text{४·४५}$

१०. $\frac{\text{य}}{\text{३य}-\frac{\text{१}}{\text{३}}}=\frac{\text{१५य}+\text{३·५}}{\text{४·य}+\text{·५}}$

११. $\text{१·५य}+\frac{\text{·०२य}+\text{·०७}}{\text{·०३}}=\text{१४५}-\frac{\text{य}+\text{७}}{\text{९}}$

अक्षर गुणांक (Literal Coefficient) वाले समीकरण—अक्षर गुणांक को ज्ञात राशि समझा जाता है। ऐसी समीकरणों को भी साधारण रीति से हल करते हैं।

उदाहरण १. $\frac{\text{य}-\text{क}}{\text{क}}+\frac{\text{य}-\text{२क}}{\text{२क}}=\frac{\text{य}-\text{३क}}{\text{३क}}$ को हल करो।

क्रिया : $\frac{\text{य}-\text{क}}{\text{क}}+\frac{\text{य}-\text{२क}}{\text{२क}}=\frac{\text{य}-\text{३क}}{\text{३क}}$

दोनों पक्षों को ६क से गुणा करने पर,

$$\text{६य}-\text{६क}+\text{३य}-\text{६क}=\text{२य}-\text{६क}$$

अर्थात्, $\text{६य}+\text{३य}-\text{२य}=-\text{६क}+\text{६क}+\text{६क}$

अर्थात्, $\text{७य}=\text{६क}$

$\therefore \quad \text{य}=\frac{\text{६क}}{\text{७}}$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. $\frac{य-अ}{ब+स}+\frac{य-ब}{अ+स}+\frac{य-स}{अ+ब}=३$ को गुणा करो।

क्रिया : $\frac{य-अ}{ब+स}+\frac{य-ब}{अ+स}+\frac{य-स}{अ+ब}=३$

इस समीकरण को निम्न प्रकार लिखते हैं।

$$\left(\frac{य-अ}{ब+स}-१\right)+\left(\frac{य-ब}{अ+स}-१\right)+\left(\frac{य-स}{अ+ब}-१\right)=०$$

अर्थात्, $\frac{य-अ-ब-स}{ब+स}+\frac{य-ब-अ-स}{अ+स}+\frac{य-स-अ-ब}{अ+ब}=०$

अर्थात्, $(य-अ-ब-स)\left\{\frac{१}{ब+स}+\frac{१}{अ+स}+\frac{१}{अ+ब}\right\}=०$

अर्थात्, $य-अ-ब-स=०$

$\therefore$ $य=अ+ब+स$ उत्तर

प्रश्नावली ५०

हल करो :—

१. $क(य-क)=ख(य-ख)$

२. $क^२(य-क)+ख^२(य-ख)=ख^२य$

३. $\frac{य}{क}=\frac{२य}{ख}$, ४. $\frac{य}{क}+\frac{२य}{३क}-\frac{३य}{४क}=२$

५. $\frac{य-क}{ख}+\frac{य-ख}{क}=२$, ६. $\frac{य-क}{कग}+\frac{य-ख}{गख}=\frac{ख ग}{क}$

७. $\frac{क}{खय}-\frac{ख}{कय}=क^२-ख^२$

८. $\frac{य}{य-क}=\frac{२य}{२य-ख}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. $\frac{य}{य+क}+\frac{य}{य+ख}=२$

१०. $\frac{य+क}{य-क}-\frac{य-ख}{य+ख}=\frac{२(क+ख)}{य}$

११. $\frac{य-प}{ब+म}+\frac{य-ब}{प+म}+\frac{य-म}{प+ब}=३$

१२. $\frac{य-क-ख}{ग}+\frac{य-ख-ग}{क}+\frac{य-क-ग}{ख}=३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १०

सरल समीकरण सम्बन्धी प्रश्न
(PROBLEMS LEADING TO SIMPLE EQUATIONS)

विषय प्रवेश—हमने सरल समीकरण का हल करना जान लिया है। बीजगणित में समीकरण एक मुख्य स्थान रखती है। इसका कारण यह है कि इसके द्वारा हम वार्तिक (इबारती) प्रश्नों को सुगमता से हल कर लेते हैं। वास्तव में समीकरण किसी वार्तिक (इबारती) प्रश्न का संक्षिप्त रूप होता है जिसमें अज्ञात राशि को किसी अक्षर से प्रकट कर देते हैं। जैसे समीकरण य—५=६ का अर्थ है कि सख्या 'य' से यदि ५ घटाये जावें तो शेषफल ६ आता है।

पिछली कक्षाओं में तुम कुछ वार्तिक (इबारती) प्रश्नों को सरल समीकरण द्वारा हल कर चुके हो। तुम ने जिस रीति का प्रयोग किया है उसे हम यहाँ फिर दोहराते हैं :—

(१) प्रश्न को बड़ी सावधानी से पढ़ो। प्रश्न में आई हुई राशियों के आपसी सम्बन्ध को समझने का प्रयत्न करो।

(२) अज्ञात राशि को 'य' से प्रगट करो।

(३) 'य' के सम्बन्ध में जो कथन प्रश्न में दिया हुआ है उसको बीजीय भाषा में लिखो।

(४) अब मालूम करो कि कौन से पद तथा व्यंजक बराबर हैं।

(५) बराबर पदों अथवा व्यंजकों को समीकरण के रूप में लिखो।

(६) समीकरण को हल करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

संख्या तथा भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. किसी संख्या में उसी का चौथाई भाग जोड़ने से योगफल ३६ से उतना अधिक है जितनी वह संख्या ३६ से छोटी है। संख्या बताओ।

मान लिया वह संख्या य है।

संख्या + संख्या का चौथाई भाग $= य + \frac{१}{४}य = \frac{५}{४}य$

योगफल की ३६ से अधिकता $= \frac{५}{४}य - ३६$

और संख्या को ३६ से कमी $= ३६ - य$

$\therefore \frac{५}{४}य - ३६ = ३६ - य$

अर्थात् $\frac{५}{४}य + य = ३६ + ३६$

अर्थात् $\frac{९}{४}य = ७२$

$\therefore य = \frac{४}{९} \times ७२ = ३२$

अतः अभीष्ट संख्या $= ३२$

उदाहरण २. नगर पालिका के चुनाव में मतदाताओं के $\frac{३}{२०}$ भाग ने मतदान में भाग नहीं लिया। इसमें कुल दो उम्मीदवार थे। विजयी उम्मीदवार को मतदाताओं के ५० प्रतिशत ने मत दिया। यदि उसने अपने प्रतिद्वन्द्वी को ६०० मत से हराया हो तो बताओ उस निर्वाचन क्षेत्र में कुल कितने मतदाता हैं।

मानलिया उस क्षेत्र में मतदाताओं की सख्या य है।

मतदाताओं की सख्या जिन्होंने भाग नहीं लिया $= \frac{३}{२०}य$

मतदाताओं की संख्या जिन्होंने भाग लिया $= य - \frac{३}{२०}य = \frac{१७}{२०}य$

विजयी उम्मीदवार को मिले मत $= \frac{१}{२}य$

असफल उम्मीदवार को मिले मत $= \frac{१७}{२०}य - \frac{१}{२}य = \frac{७}{२०}य$

अन्तर $= \frac{१}{२}य - \frac{७}{२०}य = \frac{३}{२०}य$

$\therefore \frac{३}{२०} = ६००$;

अर्थात्, $य = ६०० \times \frac{२०}{३} = ४०००$

$\therefore$ कुल मतदाताओं की संख्या $= ४०००$। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. एक संख्या दो अंकों से बनी है। दोनों अंकों का योगफल ८ है। यदि संख्या के दुगुने में १० जोड़ दें तो अंक अपना स्थान बदल देते हैं। संख्या बतलाओ।

हल : माना कि दहाई का अंक य है।

∴ इकाई का अंक = ८ − य

∴ संख्या = १०य + ८ − य = ९य + ८

संख्या के दुगुने में १० जोड़ने से = २(९य + ८) + १०

अकों के स्थान बदलने से इकाई का अंक = य और दहाई का अंक = ८ − य

∴ बदली हुई संख्या = १०(८ − य) + य

∴ २(९य + ८) + १० = १०(८ − य) + य

अर्थात्, १८य + १६ + १० = ८० − १०य + य

अर्थात्, १८य + १०य − य = ८० − १६ − १०

अथात्, २७य = ५४

∴ $य = \frac{५४}{२७} = २$; ∴ दहाई का अंक = २

∴ इकाई का अंक = ८ − २ = ६ ; ∴ अभीष्ट संख्या = २६

उत्तर

उदाहरण ४. किसी भिन्न का हर अंश से २ अधिक है। यदि अंश और हर दोनों में एक-एक जोड़ दिया जाता है तो भिन्न $\frac{३}{४}$ हो जाती है। भिन्न बताओ।

हल : माना कि भिन्न का अंश य है।

∴ भिन्न का हर = य + २

∴ $भिन्न = \frac{य}{य + २}$

∴ $\frac{य + १}{य + २ + १} = \frac{३}{४}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, ४(य+१)=३(य+२+१)

अर्थात्, ४य+४=३य+६+३

अर्थात् ४य—३य=६+३—४, अर्थात्, य=५

∴ भिन्न का अंश=५ और हर=५+२=७

∴ भिन्न $=\frac{५}{७}$ उत्तर

प्रश्नावली ५१

१. वह संख्या बताओ जिसका चार गुना उसके सात गुने से १२ कम है।

२. तीन क्रमिक (consecutive) संख्याओं का योगफल ६३ है। संख्यायें बताओ।

३. ८३ को ऐसे दो भागों में बाँटो कि बड़े भाग का $\frac{५}{३}$ छोटे भाग के $\frac{३}{७}$ से ६ अधिक है।

४. दो संख्याओं का योगफल ८ है। यदि एक संख्या में २२ जोड़ दें तो योगफल दूसरी संख्या का चौगुना हो जाता है। संख्यायें बताओ।

५. यदि किसी संख्या में से २ घटाने पर, शेषफल को ३ गुणा करके तथा गुणनफल को ५ से भाग करने पर भजनफल ६ आता है तो संख्या बताओ।

६. सुरेश के पास २५००० रुपये हैं। वह उनको अपने दो पुत्रों में इस प्रकार बाँटना चाहता है कि बड़े पुत्रों को छोटे से ५००० रुपये अधिक मिलें। प्रत्येक पुत्र का भाग बताओ।

७. श्याम के पास कुछ रुपये थे। उसने उन रुपयों का $\frac{३}{५}$ भाग अपने बड़े लड़के को दे दिया। अब उसके पास ६० रुपये शेष रहे। बताओ उसके पास कितने रुपये थे।

८. किसी खम्बे का चौथाई भाग कीचड़ में और पाँचवाँ भाग जल में है। जल के ऊपर उसकी लम्बाई ११ मीटर है। खम्बे की कुल लम्बाई बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. एक चुनाव में विनोद और सुरेन्द्र उम्मीदवार थे। मतदाताओं में से $\frac{3}{4}$ ने विनोद को मत दिये, $\frac{1}{5}$ मत देने नहीं आये। यदि सुरेन्द्र २०० मतों से हार जाता है तो बताओ मतदाताओं की संख्या कितनी थी।

१० दो अंकों की एक संख्या है। इकाई का अंक दहाई के अंक का तिगुना है। यदि संख्या में से २७ घटा दिया जावे तो शेषफल अंकों के योगफल के बराबर हो जाता है। संख्या बताओ।

११. एक संख्या दो अंकों से बनी है। इकाई का अंक दहाई के अंक का दुगुना है। संख्या इकाई के अंक के दुगुने से २४ अधिक है। संख्या बताओ।

१२ दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योगफल ९ है। यदि अंक पलट दिये जावें तो नई संख्या का मान ४५ अधिक हो जाता है। संख्या बताओ।

१३. एक संख्या १०० से कम है। इकाई का अंक दहाई के अक का दुगुना है। यदि संख्या में ३६ जोड़ दिये जाते हैं तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या बताओ।

१४. दो अंकों की एक संख्या में इकाई का अंक ८ है। यदि संख्या में ९ जोड़ दिये जाते हैं तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या बताओ।

१५. एक साधारण भिन्न का हर उसके अंश से ३ अधिक है। यदि भिन्न के अंश और हर दोनों में दो-दो जोड़ दिये जाते हैं तो भिन्न का मान $\frac{4}{5}$ हो जाता है। भिन्न बताओ।

१६. किसी साधारण भिन्न का अंश उसके हर से १ कम है। यदि उसके अंश में १ और उसके हर में २ जोड़ दिये जाते हैं तो उसका मान $\frac{2}{3}$ हो जाता है। भिन्न बताओ।

१७. किसी भिन्न का हर उसके अंश से ३ अधिक है। यदि अंश में ८ और हर में १४ जोड़ दिये जाते हैं तो भी भिन्न के मान में कोई अन्तर नहीं होता। भिन्न बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१८. किसी भिन्न का हर उसके अंश से ३ अधिक है । उसके अंश में से ५ घटाकर एक भिन्न और उसके हर में १० जोड़ने से दूसरी भिन्न बनाई गई है । यदि ये दोनों भिन्नें आपस में बराबर हों तो आरम्भ की भिन्न बताओ ।

आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण—पिता की आयु अपने पुत्र की आयु से तिगुनी है । ५ वर्ष पूर्व उसकी आयु पुत्र की आयु से चौगुनी थी । दोनों की वर्तमान आयु बताओ ।

हल : माना कि पुत्र की आयु य वर्ष है ।

∴ पिता की आयु = ३य वर्ष

५ वर्ष पूर्व पुत्र की आयु = य—५ वर्ष

और ५ वर्ष पूर्व पिता की आयु = ३य—५ वर्ष

∵ ५ वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र की आयु की चौगुनी थी

∴ ३य—५ = ४ य—५)

अर्थात्, ३य—५ = ४य—२०

अर्थात्, ३य—४य = —२०+५

अर्थात्, —य = —१५ ; ∴ य = १५

∴ पुत्र की वर्तमान आयु = १५ वर्ष और पिता की आयु = ३ × १५ = ४५ वर्ष उत्तर

प्रश्नावली ५२

१. पिता की आयु पुत्र की आयु की तिगुनी है । १५ वर्ष में उसकी आयु पुत्र की आयु की दुगुनी रह जावेगी । दोनों की वर्तमान आयु बताओ ।

२. सुरेन्द्र और नरेन्द्र की आयु का योगफल ४२ वर्ष है । सुरेन्द्र की आयु नरेन्द्र की आयु के तिगुने से २ वर्ष अधिक है । प्रत्येक की वर्तमान आयु बताओ ।

३. सतीश की आयु रमेश की आयु से ३० वर्ष कम है । १० वर्ष पूर्व सतीश की आयु रमेश की आयु की आधी थी । दोनों की आयु बताओ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४. एक राजा ३० वर्ष की आयु में गद्दी पर बैठा। उसने मरते दम तक राज्य किया। यदि उसने अपनी पूरी आयु का $\frac{४}{७}$ वें भाग राज्य किया तो उसकी पूरी आयु बताओ और बताओ कि उसने कितने वर्षों तक राज्य किया।

५. दो भाइयों में से बड़ा भाई छोटे भाई से ५ वर्ष बड़ा है। उनके पिता की आयु उनकी आयु की ६ गुनी है। तीनों की आयु का योगफल ६३ है। प्रत्येक की आयु बताओ।

६. दो भाइयों में से बड़ा भाई छोटे से २ वर्ष बड़ा है। दोनों भाइयों की वर्तमान आयु का योगफल उनके पिता की आयु से १४ वर्ष कम है। १० वर्ष पूर्व दोनों भाइयों की आयु का योगफल उनके पिता की का तिहाई था। तीनों की वर्तमान आयु बताओ।

७. दो भाइयों में से बड़े भाई की आयु छोटे की आयु की दुगुनी है। मोहन की आयु दोनों भाइयों की आयु की दुगुनी है। ९ वर्ष में मोहन की आयु छोटे भाई की आयु की तीन गुनी होगी। मोहन की वर्तमान आयु बताओ।

८. एक मनुष्य ने अपने लड़के से कहा कि वह सात वर्ष पूर्व उससे सात गुना बड़ा था तथा ३ वर्ष में वह उससे तिगुना बड़ा रह जायेगा। दोनों की आयु बताओ।

[संकेत : पुत्र की ७ वर्ष पूर्व वाली आयु मान लो]

९. ६ वर्ष पूर्व रमेश सोहन से तिगुना बड़ा था और ६ वर्ष में वह सोहन से दुगुना बड़ा रह जावेगा। दोनों की आयु बताओ।

धन-सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. रमेश के पास महेश से २० रुपये अधिक हैं। महेश के पास सतीश के रुपयों के दुगुने से १० कम है। तीनों के पास कुल रुपये ४५० हैं। बताओ प्रत्येक के पास कितने-कितने रुपये हैं।

हल : माना कि सतीश के पास य रुपये हैं।

∴ महेश के पास = (२य − १०) रुपये

और रमेश के पास = (२य − १० + २०) रुपये

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ प्रश्न के अनुसार,

$$य + २य - १० + २य - १० + २० = ४५०$$

अर्थात्, $५य = ४५० + १० + १० - २०$; अर्थात्, $५य = ४५०$

∴ $य = \frac{४५०}{५} = ९०$; ∴ सतीश के पास = ९० रुपये ।

∴ महेश के पास = २ × ९० − १० = १७० रु०

और रमेश के पास = १७० + २० = १९० रु०

उदाहरण २. एक थैली में रुपये, ५० पैसे के सिक्के और २५ पैसे के सिक्के ३, ४ और ५ के अनुपात में हैं। यदि थैली के सिक्कों का मूल्य १२५ रुपये हो तो बताओ प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने सिक्के हैं।

हल : माना कि रुपये के सिक्के ३य, ५० पैसे के सिक्के ४य और २५ पैसे के सिक्के ५य है।

रुपये के ३य सिक्कों का मूल्य = ३य रु०

५० पैसे के ४य सिक्कों का मूल्य = $\frac{४य \times ५०}{१००}$ = २य रु०

और २५ पैसे के ५य सिक्कों का मूल्य = $\frac{५य \times २५}{१००} = \frac{५य}{४}$ रु०

$$∴ \quad ३य + २य + \frac{५य}{४} = १२५$$

अर्थात्, $१२य + ८य + ५य = ५००$; अर्थात्, $२५य = ५००$

∴ $य = \frac{५००}{२५} = २०$

∴ रुपये के सिक्के = २० × ३ = ६०, ५० पैसे के सिक्के

= २० × ४ = ८०

और २५ पैसे के सिक्के = २० × ५ = १०० । उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. एक मजदूर २ रुपये २५ पैसे प्रतिदिन की मजदूरी पर ३० दिन के लिये इस शर्त पर रखा गया कि जिस दिन वह काम पर न आवेगा उस दिन उसे ५० पैसे दण्ड के देने पड़ेंगे। उसे कुल ४० रुपये मिले। बताओ वह कितने दिन काम पर नहीं आया।

हल : माना कि वह य दिन काम पर नहीं आया।

$\therefore$ काम करने के दिन $= ३० - य$

$(३० - य)$ दिनों की मजदूरी $= \frac{९}{४}(३० - य)$ रुपये

और य दिनों का दण्ड $= य \times \frac{१}{२} = \frac{य}{२}$ रुपये

$\therefore$ कुल आय $= \frac{९}{४}(३० - य) - \frac{य}{२}$ रुपये

$\therefore \frac{९}{४}(३० - य) - \frac{य}{२} = ४०$

अर्थात्, $९(३० - य) - २य = १६०$

अर्थात्, $२७० - ९य - २य = १६०$

अर्थात्, $-९य - २य = १६० - २७०$, अर्थात्, $-११य = -११०$

$\therefore य = \frac{-११०}{-११} = १०$

$\therefore$ मजदूर १० दिन काम पर नहीं आया। उत्तर

उदाहरण ४. जब गेहूँ का भाव ४ किलोग्राम प्रति रुपया था तो किसी कुटुम्ब का मासिक व्यय २०० रुपये होता था। जब गेहूँ का भाव $२\frac{१}{२}$ किलोग्राम प्रति रुपया हो गया तो उस कुटुम्ब का मासिक व्यय २१८ रुपये हो गया। यदि गेहूँ की मात्रा दोनों हालतों में बराबर खर्च होती हो तो अन्य व्यय जो स्थिर है बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

हल . माना कि अन्य व्यय तो स्थिर हैं य रुपये हैं ।

∴ पहली हालत में गेहूँ पर व्यय=(२००—य) रुपये

∴ पहली हालत में गेहूँ की मात्रा=४(२००—य) किलोग्राम

दूसरी हालत में गेहूँ पर व्यय=(२१८—य) रुपये

∴ दूसरी हालत में गेहूँ की मात्रा=$\frac{५}{३}$(२१८—य) किलोग्राम

परन्तु दोनों हालतों में गेहूँ की मात्रा बराबर है,

∴ ४(२००—य)=$\frac{५}{३}$(२१८—य)

अर्थात्, ८(२००—य)=५ (२१८—य)

अर्थात्, १६००—८य १०९०—५य

अर्थात्, —८य+५य=१०९०—१६००

अर्थात्, —३य=—५१०

$$\therefore \quad य = \frac{-५१०}{-३} = १७०$$

∴ अन्य व्यय जो स्थिर है=१७० रु० । उत्तर

उदाहरण ५. कोई धन कुछ लड़कों में बाँटा जाना है । गणना करने पर पता चला कि यदि प्रत्येक लड़के को ४ रु० देते हैं तो ४४ रुपये शेष रहते हैं और यदि प्रत्येक को ४ रु० ५० पैसे दिये जाते हैं तो ६८ रु० की कमी पड़ती है । लड़कों की संख्या बताओ और यह बताओ कि धन कितना है ।

हल : माना कि लड़कों की संख्या य है ।

जब प्रत्येक लड़के को ४ रुपये दिये जाते हैं तो

कुल धन =(४य + ४४) रुपये

जब प्रत्येक लड़के को $\frac{९}{२}$ रुपये दिये जाते हैं तो

$$\text{कुल धन} = \left(\frac{९}{२}य - ६८\right) \text{ रुपये}$$

∵ धन दोनों हालतों में समान है ।

$$\therefore \quad ४य + ४४ = \frac{९}{२}य - ६८$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $४य - \frac{९}{२}य = -६८ - ४४$

अर्थात्, $-\frac{य}{२} = -११२$

$\therefore$ $य = -११२ \times -२ = २२४$

$\therefore$ लड़कों की संख्या $= २२४$

और धन $= २२४ \times ४ + ४४ = ९४०$ रुपये। उत्तर

प्रश्नावली ५३

१. मोहन के पास सोहन से १५ रुपये अधिक हैं। सोहन के पास रमेश से १० रुपये कम हैं। तीनों के पास कुल रुपये ३२५ हैं। बताओ प्रत्येक के पास कितने-कितने रुपये हैं ?

२. सुरेन्द्र और नरेन्द्र के पास कुल ५० रुपये हैं। यदि सुरेन्द्र के पास ४ रुपये कम होते और नरेन्द्र के पास २ रुपये अधिक होते तो सुरेन्द्र के पास नरेन्द्र से दुगुने रुपये होते। बताओ दोनों के पास कितने-कितने रुपये थे ?

३. एक मेज, एक कुर्सी और एक बैंच तीनों के कुल दाम १०० रुपये है। कुर्सी के दाम बैंच के दाम से डेढ़ गुने हैं तथा मेज के दाम कुर्सी और बैंच दोनों के दामों के डेढ़ गुने हैं। प्रत्येक के अलग-अलग दाम बताओ।

४. एक थैली में रुपये, ५० पैसे और २५ पैसे के सिक्के १, २ और ४ के अनुपात में हैं। यदि कुल सिक्कों का मूल्य १२० रुपये हो तो प्रत्येक सिक्के की संख्या बताओ।

५. एक मनुष्य को ६० रुपये का ऋण देना था। उस ऋण को रुपयों, पचास पैसे तथा २५ पैसे के सिक्कों में चुकाया। यदि रुपये, ५० पैसे तथा २५ पैसे के सिक्कों में अनुपात १ : ३ : ५ का हो तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या बताओ।

६. एक मजदूर ४२ दिन के लिये इस शर्त पर रखा गया कि जिस दिन वह काम करेगा उस दिन उसको २ रु० ५० पैसे मिलेंगे

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

और जिस दिन काम पर नहीं आवेगा उसको ५० पैसे का दण्ड देना पड़ेगा। इस प्रकार उसको कुल ६९ रुपये मिले। बताओ वह कितने दिन काम पर नहीं आया ?

७. एक जादूगर इस शर्त पर खेल दिखाने को तैयार हुआ कि यदि पकड़ा गया तो ३ रुपये देने पड़ेंगे वरना ५ रुपये मिलेंगे। उसने १५ बार खेल दिखा कर ४३ रुपये प्राप्त किये। बताओ वह कितनी बार पकड़ा गया ?

८. दो टोकरियों में कुल ९० सेव हैं। एक टोकरी से ५ सेव निकाल कर दूसरी टोकरी में रख देने से दोनों टोकरियों में बराबर-बराबर सेव हो जाते हैं। बताओ प्रत्येक टोकरी में कितने-कितने सेव थे ?

९. मोहन के पास सोहन से दूनी पूंजी है। एक वर्ष के अन्त में मोहन को ५०० रुपये की हानि और सोहन को ५०० रुपये का लाभ हुआ। अब सोहन के पास मोहन से दुगुने रुपये हो गये। बताओ दोनों के पास पहले कितने-कितने रुपये थे ?

१०. महेश और रमेश बराबर-बराबर धन लेकर जुआ खेलने बैठे। महेश २५ रुपये हार गया। अब रमेश के पास महेश से दुगुने रुपये हो गये। बताओ वे कितना-कितना रुपया लेकर बैठे थे ?

११. एक मनुष्य अपने धन का $\frac{१}{४}$ भाग अपनी लड़की को और $\frac{२}{५}$ भाग अपने लड़के को देता है। अब उसके पास २८० रुपये शेष हैं, बताओ उसके पास कितने रुपये थे ?

१२. जब गेहूँ का भाव रुपये का दो किलोग्राम है तो किसी कुटुम्ब का मासिक व्यय २५० रु० होता है, जब गेहूँ का भाव रुपये का २½ किलोग्राम है। तो उस कुटुम्ब का मासिक व्यय २४० रुपये होता है। यदि गेहूँ की मात्रा दोनों हालतों में बराबर रहे तो अन्य खर्चे (जो दोनों हालतों में समान हैं) बताओ।

१३. किसी अस्पताल का वार्षिक व्यय कुछ स्थिर है और कुछ रोगियों की संख्या पर निर्भर है। जब रोगियों की संख्या ११४ है तो कुल

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्यय ७५० रु० और जब रोगियों की संख्या १३९ है तो कुल व्यय ९०० रु० होता है। यदि किसी समय अस्पताल का कुल व्यय ६९० रु० होता हो तो उस समय रोगियों की संख्या बताओ।

१४. एक मनुष्य कुछ भिखारियों को रुपये बाँटना चाहता है। यदि वह प्रत्येक भिखारी को ३ रुपये देता है तो ८ रुपये की कमी पड़ती है। यदि वह प्रत्येक को दो रुपये देता है तो उसके पास ६ रुपये बच जाते हैं। भिखारियों की संख्या बताओ।

१५. एक काम को पूरा करने के लिये किसी ठेकेदार ने कुल ४० व्यक्ति लगाये। उनमें से कुछ आदमी और शेष लड़के थे। प्रत्येक आदमी को २ रु० ५० पैसे और प्रत्येक लड़के को १ रु० ५० पैसे मजदूरी के मिले। इस प्रकार ठेकेदार के कुल ९० रुपये व्यय हुए। आदमियों और लड़कों की अलग-अलग संख्या बताओ।

१६. एक किलोग्राम चाय और तीन किलोग्राम चीनी का मूल्य मिलकर १० रुपये है। चाय का मूल्य २५% और चीनी का मूल्य ५०% बढ़ जाने पर दोनों की पहली मात्रा का नया मूल्य १४ रुपये हो जाता है। चाय और चीनी का मूल्य अलग-अलग बताओ।

१७. दो घोड़ों का क्रय मूल्य १००० रुपये है। एक को ५% के लाभ से और दूसरे को ७½% की हानि से बेचने पर उसे न लाभ हुआ और न हानि। बताओ प्रत्येक घोड़े का क्रय मूल्य क्या था?

१८. ४०० रुपये में एक घोड़ा बेचने पर कुछ हानि हुई। यदि वह घोड़ा ६५० रुपये में बेचा जाता तो उसको लाभ होता। यदि यह लाभ पहली हानि का ⅔ हो तो घोड़े का क्रय-मूल्य बताओ।

१९. एक मनुष्य ने १६६ आम १० रुपये में मोल लिये उसमें से कुछ आम तो उसने १ रुपये में १८ और शेष आम रुपये में १५ की दर से बिये। दोनों प्रकार के आमों की संख्या अलग-अलग बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२०. एक मनुष्य ने दो प्रकार के सेव बराबर-बराबर संख्या में मोल लिये। एक प्रकार के सेवों को २ रु० के ३ के भाव से और दूसरी प्रकार के ३ रु० के ४ के भाव से लिये। उसने दोनों प्रकार के सेवों को मिलाकर ५ रु० के ६ के भाव से बेच दिया, इस प्रकार उसको कुल ६ रुपये का लाभ हुआ। प्रत्येक प्रकार के सेवों की संख्या बताओ।

चाल सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. एक विद्यार्थी अपने घर से २ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलकर अपने कॉलेज ५ मिनट देरी से पहुँचता है। यदि वह ५ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलता तो वह १० मिनट पहले पहुँच जाता। घर से कॉलेज की दूरी बताओ।

हल : माना कि घर से कॉलेज की दूरी य किलोमीटर है।

∴ घर से कॉलेज तक ४ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलने में समय लगा $= \frac{य}{४}$ घण्टे $=$ १५य मिनट

∴ ठीक समय $=$ (१५य $-$ ५) मिनट

और ५ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलने में समय लगा $= \frac{य}{५}$ घण्टे $=$ १२य मिनट

∴ ठीक समय $=$ (१२य $+$ १०) मिनट

∴ १५य $-$ ५ $=$ १२य $+$ १०

अर्थात्, ३य $=$ १५

∴ य $=$ ५

∴ घर से कॉलेज की दूरी $=$ ५ किलोमीटर

उदाहरण २. एक मनुष्य क स्थान प से ५ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से स्थान फ की ओर चलता है। दूसरा मनुष्य ख स्थान फ से ४ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से स्थान प की ओर उसी समय चलना आरम्भ करता है। यदि दोनों स्थानों प और फ की बीच की दूरी ५४ किलोमीटर हो तो दोनों मनुष्य कब और कहाँ मिलेंगे ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

हल : माना कि दोनों मनुष्य य घण्टे पश्चात् मिलते हैं।

य घण्टे में मनुष्य क चलता है = ५य किलोमीटर

य घण्टे में मनुष्य ख चलता है = ४य किलोमीटर

दोनों मनुष्य य घण्टे में कुल ५४ किलोमीटर चलते हैं

∴ ५य + ४य = ५४ ; अर्थात्, ९य = ५४

$$\therefore \quad य = \frac{५४}{९} = ६$$

∴ दोनों मनुष्य चलने के ६ घण्टे पश्चात् मिलेंगे।

मिलने के स्थान की स्थान प से दूरी = ५ × ६ = ३० किलोमीटर

उदाहरण ३. नदी का बहाव ५ किलोमीटर प्रति घण्टा है। एक नाव को नदी के बहाव के साथ १० किलोमीटर जाने में उतनी दूर वापस आने की अपेक्षा तिहाई समय लगता है। स्थिर जल में नाव की चाल बताओ।

हल : माना कि स्थिर जल में नाव की चाल = य किलोमीटर प्रति घण्टा

∵ नदी की चाल = ५ किलोमीटर प्रति घण्टा

∴ बहाव के साथ नाव की चाल = (य + ५) किलोमीटर प्रति घण्टा

और बहाव के विपरीत नाव की चाल = (य − ५) किलोमीटर प्रति घण्टा

∴ बहाव के साथ १० किलोमीटर जाने में नाव समय लेगी

$$= \frac{१०}{य + ५} \text{ घण्टे}$$

और बहाव के विपरीत १० किलोमीटर जाने में नाव समय लेगी

$$= \frac{१०}{य - ५} \text{ घण्टे}$$

$$\therefore \frac{१०}{य + ५} = \frac{१}{३}\left(\frac{१०}{य - ५}\right)$$

अर्थात्, ३०(य − ५) = १०(य + ५)

अर्थात्, ३०य − १५० = १०य + ५०

अर्थात्, ३०य − १०क = ५० + १५०; अर्थात्, २०य = २००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $य = \frac{२००}{२०} = १०$

नाव की चाल = १० किलोमीटर प्रति घण्टा

प्रश्नावाली ५४

१. एक मनुष्य मेरठ से देहली ८ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से जाता है। यदि वह ९ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से जाता तो उसको आधा घण्टा कम लगता। मेरठ से देहली तक की दूरी बताओ।

२. एक मनुष्य ने कोई यात्रा किसी चाल से तय की। यदि वह ४½ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलता तो उसे १ घण्टा कम लगता। यदि वह ३ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से चलता तो उसे ३ घण्टे अधिक लगते यात्रा की दूरी बताओ।

३. एक रेलगाड़ी १२ सेकण्ड में स्टेशन के प्लेटफार्म को पार करती है। यदि गाड़ी की चाल ४८ किलोमीटर प्रति घण्टा और प्लेटफार्म की लम्बाई १२० मीटर हो तो रेलगाड़ी की लम्बाई बताओ।

४. एक रेलगाड़ी एक दौड़ते हुए मनुष्य को १५ सेकंड में पार कर जाती है। यदि मनुष्य की चाल १५ किलोमीटर प्रति घण्टा हो तो गाड़ी की लम्बाई बताओ। जब कि गाड़ी की चाल ५० किलोमीटर प्रति घण्टा है।

५. एक मनुष्य के पास ५ घण्टे फुरसत के हैं। इतने समय में वह १० किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से कितनी दूर टहल कर ६ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से फिर वापस आ सकता है।

६. दो स्थानों क और ख के बीच की दूरी १५३ किलोमीटर है। एक मनुष्य स्थान क से और दूसरा मनुष्य स्थान ख से एक साथ रवाना होते हैं। पहला ममुष्य २ घण्टे में ५ किलोमीटर और दूसरा मनुष्य १ घण्टे में २ किलोमीटर चलता है। दोनों कितने समय के बाद और क से कितनी दूरी पर मिलेंगे ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. दो स्थानों क और ख के बीच की दूरी ८ किलोमीटर है। दो मनुष्य रमेश और सतीश स्थान क से एक साथ चलते हैं। रमेश गाड़ी से १० किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से और सतीश ५ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से पैदल चलता है। यदि रमेश स्थान ख पर पहुँच कर तथा वहाँ १० मिनट रुक कर फिर गाड़ी से ही वापस आता है तो वह सतीश से किस स्थान पर मिलेगा ?

८. नगर क और ख दो मार्गों से मिलाये गये हैं। पहले से दूरी २२४ किलोमीटर तथा दूसरे मार्ग से दूरी २१० किलोमीटर है। एक मोटरकार लम्बे मार्ग से होकर चली। उसी समय एक 'बस' (Bus) जो मोटरकार से ४ किलोमीटर प्रति घण्टा कम चलती है, छोटे मार्ग से चली। नगर ख पर दोनों एक साथ पहुँचीं। दोनों की चाल बताओ।

९. एक नाविक एक नाव को स्थिर जल में ५ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से खेता है। यदि वह नदी के बहाव के साथ जाने में उतनी ही दूर नदी के विरुद्ध जाने की अपेक्षा चौथाई समय लेता है तो नदी की चाल बताओ।

१०. एक नाविक नदी के साथ ६ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से और नदी के विरुद्ध ४ किलोमीटर प्रति घण्टे की चाल से नाव को खे सकता है। वह अपने चलने के स्थान से कुछ दूर तक नाव को ले जाकर फिर अपने स्थान पर वापस लौट आता है। यदि आने-जाने में उसे कुल समय ७ घण्टे ३० मिनट लगे हों तो बताओ वह कितनी दूर गया था ?

विविध प्रश्न

उदाहरण १. किसी आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से ५ मीटर अधिक है। यदि आयत की लम्बाई ६ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई ४ मीटर कम कर दी जाय तो भी क्षेत्रफल में कोई अन्तर नहीं होता। लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

हल : माना लिया कि आयत की चौड़ाई = य मीटर

∴ आयत की लम्बाई = (य + ५) मीटर

∴ आयत का क्षेत्रफल = य(य + ५) वर्ग मीटर

दूसरी अवस्था में, लम्बाई = य + ५ + ६ = (य + ११) मीटर

और चौड़ाई = (य − ४) मीटर

क्षेत्रफल = (य + ११) (य − ४) वर्ग मीटर

∴ य(य + ५) = (य + ११) (य − ४)

अर्थात, $य^2 + ५य = य^2 + ७य - ४४$

अर्थात्, $य^2 + ५य - य^2 - ७य = -४४$; अर्थात् $-२य = -४४$

$$∴ य = \frac{-४४}{-२} = २२$$

∴ आयत की चौड़ाई = २२ मीटर और लम्बाई = २२ + ५
= २७ मीटर ।

उदाहरण २. ३० को ऐसे चार भागों में बाँटों कि यदि पहले में जोड़ें, दूसरे से ३ कम करें, तीसरे को ४ से गुणा करें और चौथे को पाँच से भाग दें तो प्रत्येक दशा में फल समान होवे ।

हल : माना लिया कि प्रत्येक दशा में फल य

∴ पहला भाग + २ = य, ∴ पहला भाग = य − २

∴ दूसरा भाग − ३ = य, ∴ दूसरा भाग = य + ३

तीसरा भाग × ४ = य, ∴ तीसरा भाग $\frac{य}{४}$

और चौथा भाग ÷ ५ = य, ∴ चौथा भाग = ५य

$$∴ य - २ + ३ + \frac{य}{४} + ५य = ३०$$

अर्थात्, $७य + \frac{य}{४} = ३० + २ - ३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $\frac{२८य}{४}=२९$; $\therefore$ $य=\frac{२९\times४}{२९}=४$

$\therefore$ पहला भाग $=४-२=२$,
दूसरा भाग $=४+३=७$,
तीसरा भाग $=\frac{४}{४}=१$
और चौथा भाग $=४\times५=२०$ } उत्तर

उदाहरण ३. दो यात्रियों के पास २८० किलोग्राम असबाब है। दोनों में से प्रत्येक को ५ रु० और ६ रु० क्रमशः पृथक्-पृथक् अपने असबाब का किराया देना पड़ता है। यदि तमाम असबाब उनमें से एक यात्री के पास होता तो उसे १२ रु० ५० पैसे देने पड़ते। बताओ प्रत्येक यात्री बिना किराये के कितना सामान ले जा सकता है ?

हल : मान लिया कि एक यात्री बिना किराये के य किलोग्राम सामान ले जा सकता है।

$\therefore$ २ यात्री बिना किराये के २य किलोग्राम सामान ले जा सकते हैं।

$\therefore$ (२८०—२य) किलोग्राम का किराया $=५+६=११$ रु०

$\therefore$ १ किलोग्राम का किराया $=\frac{११}{२८०-२य}$ रु०

दूसरी अवस्था में जब सब सामान एक ही यात्री के पास होता, तो (२८०—य) किलोग्राम का किराया $=१२\cdot५०$ रु०

$\therefore$ १ किलोग्राम का किराया $=\frac{१२\cdot५०}{२८०-य}$ रु०

$\therefore$ $\frac{११}{२८०-२य}=\frac{१२\cdot५०}{२८०-य}$

अर्थात्, $११(२८०-य)=१२\cdot५०(२८०-२य)$

अर्थात्, $३०८०-११य=३५००-२५य$

अर्थात् $-११य+२५य=३५००-३०८०$

अर्थात्, $१४य=४२०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore\ य = \frac{४२०}{१४} = ३०$$

अतः एक यात्री बिना किराये के ३० किलोग्राम सामान ले जा सकता है।

ठोस तथा खोखले वर्ग

बराबर वाले चित्र को ऊपर वाली पंक्ति में $क_१, क_२ \cdots\cdots क_७, क_८$ स्थानों पर ८ मनुष्य खड़े हैं। इसी प्रकार ८ इसके नीचे मनुष्यों की इसी प्रकार की ७ पंक्तियाँ और बनाई गई हैं। इस प्रकार इस चित्र में ८ समान्तर पंक्तियाँ हैं और प्रत्येक पंक्ति में ८ मनुष्य हैं। यह ठोस वर्ग है।

$$\begin{array}{cccccccc}
क_१ & क_२ & क_३ & क_४ & क_५ & क_६ & क_७ & क_८ \\
ख_१ & ख_२ & ख_३ & ख_४ & ख_५ & ख_६ & ख_७ & ख_८ \\
ग_१ & ग_२ & ग_३ & ग_४ & ग_५ & ग_६ & ग_७ & ग_८ \\
 & & | & & & | & & \\
घ_१ & घ_२ & घ_३ & घ_४ & घ_५ & घ_६ & घ_७ & घ_८ \\
 & & | & | & | & | & & \\
ज_१ & ज_२ & ज_३ & ज_४ & ज_५ & ज_६ & ज_७ & ज_८ \\
 & & | & & & | & & \\
प_१ & प_२ & प_३ & प_४ & प_५ & प_६ & प_७ & प_८ \\
फ_१ & फ_२ & फ_३ & फ_४ & फ_५ & फ_६ & फ_७ & फ_८ \\
म_१ & म_२ & म_३ & म_४ & म_५ & म_६ & म_७ & म_८
\end{array}$$

अतः जब मनुष्यों को समान्तर पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा किया जाता है कि एक पंक्ति में उतने मनुष्य होते हैं जितनी कुल पंक्तियाँ होती हैं तो इस प्रकार की व्यवस्था को मनुष्यों को **ठोस वर्ग** में खड़ा करना कहते हैं।

यदि ठोस वर्ग की प्रत्येक पंक्ति में य मनुष्य हों तो ठोस वर्ग में मनुष्यों की संख्या $= य^२$।

इस प्रकार ऊपर वाले ठोस वर्ग में मनुष्यों की संख्या $= ८^२$

उपर्युक्त चित्र में से यदि वर्ग $घ_४$ $घ_५$ $ज_५$ $ज_४$ निकाल लिया जावे तो शेष वर्ग को एक **खोखला वर्ग** कहते हैं जिसकी सामने की पंक्ति में ८ मनुष्य हैं और यह खोखला वर्ग तीन पंक्तियों वाला कहलाता है। यदि इसमें से वर्ग $ग_३$ $ग_६$ $प_६$ $प_३$ निकाल दिया जावे तो शेष वर्ग दो पंक्तियों वाला खोखला वर्ग कहलाता है। जिसकी सामने की पंक्ति में ८ मनुष्य हैं।

वर्ग $ग_३$ $ग_६$ $प_६$ $प_३$ के मनुष्यों की संख्या $= (८ - २ \times २)^२$

$\therefore$ २ पंक्तियों वाले उपर्युक्त खोखले वर्ग में मनुष्यों की संख्या

$$= ८^२ - (८ - २ \times २)^२$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः यदि प पंक्तियों वाले खोखले वर्ग के सामने की पंक्ति में न मनुष्य हों तो उसमें मनुष्यों की संख्या

$$= न^२ - (न - २प)^२$$

उदाहरण ४. एक रेजिमेन्ट के सैनिकों को एक ऐसे खोखले वर्ग में खड़ा किया जिसमें ४ पंक्तियाँ हैं। फिर उन्हीं सैनिकों को ऐसे खोखले वर्ग में खड़ा किया गया जिसमें दो पंक्तियाँ हैं। यदि दूसरे खोखले वर्ग की सामने की पंक्ति में पहले खोखले वर्ग की अपेक्षा ४ सैनिक अधिक हैं तो सैनिकों की संख्या ज्ञात करो।

हल : माना कि पहले खोखले वर्ग के सामने की पंक्ति में य सैनिक हैं।

∴ दूसरे खोखले वर्ग के सामने की पंक्ति में सैनिकों की संख्या

$$= य + ४$$

पहले खोखले वर्ग में सैनिकों की संख्या

$$= य^२ - य(य - २ \times ४)^२ = य^२ - (य - ८)^२$$

और दूसरे खोखले वर्ग में सैनिकों की सख्या

$$= (य + ४)^२ - (य + ४ - २ \times २)^२ = (य + ४)^२ - य^२$$

किन्तु, दोनों वर्गों में सैनिकों की संख्या समान है

$$\therefore \quad (य + ४)^२ - य^२ = य^२ - (य - ८)^२$$

अर्थात्, $य^२ + ८य + १६ - य^२ = य^२ - य^२ + १६य - ६४$

अर्थात्, $८य + १६ = १६य - ६४$; अर्थात्, $-८य = -८०$

$$\therefore \quad य = \frac{-८०}{-८} = १०$$

∴ सैनिकों की संख्या $= १०^२ - (१० - ८)^२$

$$= १०० - ४ = ९६।$$ उत्तर

प्रश्नावली ५५

१. यदि एक वर्गाकार कमरे की लम्बाई ५ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई ४ मीटर कम कर दी जाय तो क्षेत्रफल में कोई अन्तर नहीं पड़ता। कमरे की लम्बाई ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. किसी आयत की लम्बाई ४० मीटर है। यद्यपि उसकी लम्बाई ५ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई २ मीटर कम कर दी जाय तो उसका क्षेत्रफल ६० वर्गमीटर बढ़ जाता है। आयत की चौड़ाई बताओ।

३. एक मैदान की लम्बाई और चौड़ाई में ४ और ३ का अनुपात है। यदि लम्बाई ५ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई ३ मीटर कम कर दी जाय तो क्षेत्रफल ७० वर्गमीटर बढ़ जाता है। मैदान की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

४. १०० को ऐसे चार भागों में बाँटों कि पहले में चार जोड़ने पर, दूसरे में से चार घटाने पर, तीसरे को ४ से गुणा करने पर और चौथे को ४ से भाग देने पर एक ही संख्या प्राप्त हो।

५. १८७ को ऐसे चार भागों में बाँटो कि यदि पहले में से १० घटायें, दूसरे में ३ जोड़े और तीसरे को ९ से भाग दें तो प्रत्येक दशा में फल चौथे भाग के बराबर होता है।

६. एक ही स्थान को जाने वाले दो यात्रियों के पास ५२० किलोग्राम ग्राम सामान है। दोनों को अधिक सामान के लिये पृथक्-पृथक् १० रु० और १२ रु० किराये के देने पड़ते हैं। यदि सब सामान एक ही यात्री के पास होता तो उसे २४ रु० देने पड़ते। बताओ प्रत्येक यात्री बिना किराये के कितना सामान ले जा सकता है ?

७. एक रेजिमेंट के सैनिकों को यदि एक ठोस वर्ग के रूप में खड़ा किया जाता है तो सैनिक बचे रहते हैं। यदि ठोस वर्ग की प्रत्येक पंक्ति में दो-दो सैनिक बढ़ा दिये जाते हैं तो इस प्रकार के ठोस वर्ग बनने में १०० सैनिकों की कमी पड़ जाती है। सैनिकों की संख्या बताओ।

८. एक फौजी अफसर अपने सैनिकों को जब एक ठोस वर्ग में खड़ा करता है तो ५५ सैनिक शेष रहते हैं। यदि वह वर्ग की पंक्ति में एक सैनिक बढ़ा देता है तो ठोस वर्ग को पूरा करने के लिए ४० सैनिकों की और आवश्यकता पड़ती है। सैनिकों की संख्या ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. एक सेना के सैनिकों को ५ पंक्ति वाले ऐसे खोखले वर्ग में खड़ा किया जाता है जिसके सामने की पंक्ति में १०० सैनिक खड़े हों। सैनिकों की कुल संख्या बताओ।

१०. एक सेना के सैनिकों की संख्या २८०० है। उसको १० पंक्ति वाले खोखले वर्ग में खड़ा किया जाता है। बताओ वर्ग की सामने की पंक्ति में कितने सैनिक खड़े हैं ?

११. एक फौजी अफसर अपने सैनिकों ५ पंक्ति वाले खोखले वर्ग में खड़ा करता है तो ५० सैनिक बचे रहते हैं। यदि उस खोखले वर्ग में ६ पंक्तियाँ कर दी जाती हैं तो ६ सैनिकों की कमी पड़ती है। सैनिकों की संख्या बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ११

प्रारम्भिक विलोपन
(FLEMENTARY ELIMINATION)

निम्न समीकरणों पर विचार करो

य + ३ = ७ ·····(१)

य − २ = ४ ·····(२)

(१) से य का मान ४ और (२) से य का मान ६ आता है अर्थात् दोनों समीकरणों में य का मान पृथक्-पृथक् है ।

निम्न समीकरणों पर विचार करो,

कय + ख = ० ·····(१)

और पय + फ = ० ·····(२)

(१) से, $य = -\frac{ख}{क}$ और (२) से, $य = -\frac{फ}{प}$

यदि दोनों समीकरणें य के एक ही मान से सन्तुष्ट हों तो य के दोनों मान बराबर होने चाहिये अर्थात्

$$-\frac{ख}{क} = -\frac{फ}{प}\text{ ; या, }\frac{क}{ख} = \frac{फ}{प}$$

∴ पख = फक ·····(३)

समीकरण (३) अज्ञान राशि के गुणांकों तथा अचर पदों में ऐसा सम्बन्ध प्रकट करती है जिससे कि अज्ञात राशि के एक ही मान से दोनों समीकरणें (१) और (२) सन्तुष्ट हो जाती हैं। इस क्रिया को विलोपन (Elimination) कहते हैं तथा सम्बन्ध (३) को विलोपन फल (Eliminant) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri.

अतः जब एक अज्ञात राशि को दो समीकरणों से लुप्त करके उसके गुणांकों तथा अचर पदों में एक ऐसा सम्बन्ध स्थापित किया जाता है जिससे दोनों समीकरणें अज्ञात राशि के केवल एक ही मान से सन्तुष्ट हो जाती है तो इस क्रिया को विलोपन (Elimination) कहते हैं और इस सम्बन्ध को विलोपन फल (Eliminant) कहते हैं।

जिस प्रकार एक अज्ञात राशि को दो समीकरणों से विलुप्त करते हैं इसी प्रकार दो अज्ञात राशियों को तीन समीकरणों से विलुप्त कर सकते हैं।

विलोपन फल ज्ञात करने की कई विधियाँ हैं जो भिन्न-भिन्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जावेंगी।

पहली विधि

अज्ञात राशि के गुणांकों (Coefficients) को समान बनाकर

उदाहरण १. निम्न समीकरणों से य को विलुप्त करो :—

कय + ख = ० और पय + क = ०

क्रिया : कय + ख = ० ·····(१)

पय + फ = ० ·····(२)

(१) को प तथा (२) को क से गुणा करने पर,

पकय + पख = ० ·····(३)

पकय + कफ = ० ·····(४)

(३) में से (४) घटाने पर,

पख — कफ = ०; या, पख = कफ।

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

टिप्पणी : यह विधि उसी समय उपयोग में ला सकते हैं जब सब समीकरणों में अज्ञात राशि का घात समान हो।

दूसरी विधि

प्रतिस्थापन की विधि (Method of Substitution)

उदाहरण २. निम्न समीकरणों से य को विलुप्त करो।

२कय — र = ० और कय^{२} — ल = ०

क्रिया : २कय — र = ० ·····(१)

और कय^{२} + ल = ० ·····(२)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) से, $य = \frac{र}{२क}$

(२) में य का मान रख कर, $क\left(\frac{र}{२क}\right)^{२} + ल = ०$

अर्थात्, $\frac{कर^{२}}{४क^{२}} + ल - ०$; अर्थात्, $\frac{र^{२}}{४क} + ल = ०$

अर्थात्, $र^{२} + ४कल = ०$ । यही अभीष्ट विलोपन फल है ।

टिप्पणी : प्रतिस्थापन की विधि को उसी समय काम में लाते हैं जब कि किसी एक समीकरण से अज्ञात राशि का मान सुगमता से निकलता हो ।

तीसरा नियम

तुलना करने की विधि (Method of Comparison)

उदाहरण ३. निम्न समीकरणों से य को विलुप्त करो ।

$पय^{३} + फ = ०$ और $लय^{४} - म = ०$

क्रिया : $पय^{३} + फ = ०$ .....(१)

$रय^{४} - म = ०$ .....(२)

(१) से, $य^{३} = \frac{-फ}{प}$ .....(३)

और (२) से, $य^{४} = \frac{म}{ल}$ .....(४)

(३) से, $य^{१२} = (य^{३})^{४} = \left(\frac{-फ}{प}\right)^{४}$ .....(५)

और (४) से, $य^{१२} = (य^{४})^{३} = \left(\frac{म}{ल}\right)^{3}$ .....(६)

$\therefore$ (५) और (६) से, $\left(\frac{-फ}{प}\right)^{४} = \left(\frac{म}{ल}\right)^{3}$

या, $\frac{फ^{४}}{प^{४}} = \frac{म^{3}}{ल^{3}}$: $\therefore$ $ल^{३}फ^{४} = म^{३}प^{४}$

यही अभीष्ट विलोपन फल है ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ४. निम्न समीकरणों में से ल को विलुप्त करो :—

$$\text{कय}+\text{खर}+\text{गल}=0 \text{ और } \frac{\text{क}}{\text{य}}+\frac{\text{ख}}{\text{र}}+\frac{\text{ग}}{\text{ल}}=0$$

क्रिया। $\text{कय}+\text{खर}+\text{गल}=0$ .....(१)

$\frac{\text{क}}{\text{य}}+\frac{\text{ख}}{\text{र}}+\frac{\text{ग}}{\text{ल}}=0$ .....(२)

(१) से, $\text{गल}=-(\text{कय}+\text{खर})$ .....(३)

(२) से, $\frac{\text{ग}}{\text{ल}}=-\left(\frac{\text{क}}{\text{य}}+\frac{\text{ख}}{\text{र}}\right)$ .....(४)

(३) और (४) को गुणा करने पर,

$$\text{ग}^2=(\text{कय}+\text{खर})\left(\frac{\text{क}}{\text{य}}+\frac{\text{ख}}{\text{र}}\right)$$

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

चौथी विधि

वज्र गुणन की विधि (Method of Cross-multiplication)

उदाहरण ५. $\text{कय}^2+\text{खय}+\text{ग}=0$ और $\text{पय}^2+\text{मय}+\text{न}=0$ में से य को विलुप्त करो।

क्रिया : $\text{कय}^2+\text{खय}+\text{ग}=0$ .....(१)

$\text{पय}^2+\text{मय}+\text{न}=0$ .....(२)

वज्रगुणन से, $\frac{\text{य}^2}{\text{खन}-\text{गम}}=\frac{\text{य}}{\text{गप}-\text{कन}}=\frac{1}{\text{कम}-\text{खप}}$

$\therefore\ \text{य}^2=\frac{\text{खन}-\text{गम}}{\text{कम}-\text{खप}}$ .....(३)

और $\text{य}=\frac{\text{गप}-\text{कन}}{\text{कम}-\text{खप}}$; या, $\text{य}^2=\left(\frac{\text{गप}-\text{कन}}{\text{कम}-\text{खप}}\right)^2$ .....(४)

(३) और (४) से, $\frac{\text{खन}-\text{गम}}{\text{कम}-\text{खप}}=\left(\frac{\text{गप}-\text{कन}}{\text{कम}-\text{खप}}\right)^2$

या, $(\text{खन}-\text{गम})(\text{कम}-\text{खप})=(\text{गप}-\text{कन})^2$

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५६

विलुप्त करो :—

१. चय + छर = ज और छय − चर = ० में से य को

२. कय − $क^2$ = $ख^2$ और खय + कर = २कख में से य को

३. $कप^2$ + ख = ० और $लप^2$ + क = ख में से य को

४. कय + ख = ० और $पय^2$ + लय + ख = ० में से य को

५. य + र = क और $य^2$ + $र^2$ = $ख^2$ में से र को

६. क + ख = य और $क^2$ $ख^2$ = ल में से क को

७. य = $कप^2$ + खप + ल और य = पफ + र में से प को

८. कय + ख = ० और पय − फ = ० में से य को

९. $लम^3$ + पफ = ० और $पम^4$ − कख = ० में से म को

१०. $य + \frac{१}{र} = १$ और $र + \frac{१}{ल} = १$ में से र को

११. मय + पर + फल = ० और $\frac{म}{य} + \frac{प}{र} + \frac{फ}{ल} = क$ में से र को

१२. $कय^2$ + खय + ग = ० और $मय^2$ + नय + ल = ० से य को

१३. $पम^3$ + $फम^2$ + ल = ० और $कम^3$ + $खम^2$ − र = ० से म को

१४. $कय^2$ + पय + म = ० और $खय^2$ + ल = ० से य को

पाँचवीं विधि

सूत्रों का प्रयोग (Application of formulae)

उदाहरण १. निम्नलिखित से य को विलुप्त करो :—

$$य - \frac{१}{य} = क \cdots\cdots (१) \text{ और } य + \frac{१}{य} = ख \qquad \cdots\cdots\cdots (२)$$

(१) का वर्ग करने पर, $य^2 + \frac{१}{य^2} = क^2 + २$ ·····(३)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(२) का वर्ग करने पर, $य^२ + \frac{१}{य^२} = ख^२ - २$ .....(४)

(३) और (४) से, $क^२ + २ = ख^२ - २$, यही विलोपन फल है।

उदाहरण २. निम्न में से क को विलुप्त करो :—

$क + \frac{१}{क} = प$.....(१) और $क^३ + \frac{१}{क^३} = फ$...(२) में से क को विलुप्त करो।

क्रिया : (१) का घन करने पर, $क^३ + \frac{१}{क^३} + ३\left(क + \frac{१}{क}\right) = प^३$ .....(३)

(१) और (२) से (३) में मान रख कर, $फ + ३प = प^३$

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

उदाहरण ३. निम्न में से प को विलुप्त करो :—

$क = \frac{२यप}{१ - प^२}$ .....(१) और $ख = \frac{म(१ + प^२)}{१ - प^२}$ .....(२)

(१) को य से और (२) को म से भाग देने पर,

$$\frac{क}{य} = \frac{२प}{१ - प^२} \quad .....(३)$$

$$और \quad \frac{ख}{म} = \frac{१ + प^२}{१ + प^२} \quad .....(४)$$

(३) और (४) का वर्ग करने पर,

$$\frac{क^२}{य^२} = \frac{४प^२}{(१ - प^२)^२} \quad .....(५)$$

$$और \quad \frac{ख^२}{म^२} = \frac{(१ + प^२)^२}{(१ - प^२)^२} \quad .....(६)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(६) में से (५) घटाने पर,

$$\frac{ख^2}{म^2}-\frac{क^2}{य^2}=\frac{(१+प^2)^2}{(१-प^2)^2}-\frac{४प^2}{(१-प^2)^2}$$

$$=\frac{(१+प^2)^2-४प^2}{(१-प^2)^2}=\frac{(१-प^2)^2}{(१-प^2)^2}=१$$

$\therefore \quad \frac{ख^2}{म^2}-\frac{क^2}{य^2}=१$ अभीष्ट विलोपन फल है।

उदाहरण ४. निम्न में से य को विलुप्त करो :—

$$य^3+\frac{३}{य}=४(क^3+ख^3) \qquad \cdots\cdots(१)$$

और $$३य+\frac{१}{य^3}=४\,(क^3-ख^3) \qquad \cdots\cdots(२)$$

(१) और (२) को जोड़ने पर, $य^3+३य+\frac{३}{य}+\frac{१}{य^3}=८क^3$

या, $\left(य+\frac{१}{य}\right)^3=(२क)^3;\ \therefore \quad य+\frac{१}{य}=२क \qquad \cdots\cdots(३)$

(१) में से (२) घटाने पर, $य^3-३य+\frac{३}{य}-\frac{१}{य^3}=८क^3$

अर्थात् $\left(य-\frac{१}{य}\right)^3=(२ख)^3;\ \therefore य-\frac{१}{य}=२ख \qquad \cdots\cdots(४)$

(३) का वर्ग करने पर, $य^2+\frac{१}{य^2}+२=४क^2 \qquad \cdots\cdots(५)$

(४) का वर्ग करने पर, $य^2+\frac{१}{य^2}-२=४ख^2 \qquad \cdots\cdots(६)$

(५) में से (६) घटा कर, $४=४क^2-४ख^2$

या, $१=क^2-ख^2$, यही अभीष्ट विलोपन फल है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विविध रीतियाँ

उदाहरण ५. निम्न में से य को विलुप्त करो :—

$$\frac{क}{य}+\frac{य}{क}=प \cdots (१) \text{ और } \frac{क}{य}-\frac{य}{क}=फ \quad \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) जोड़ने पर, $\frac{२क}{य}=प+फ \quad \cdots\cdots (३)$

(१) में से (२) घटाने पर, $\frac{२य}{क}=प-फ \quad \cdots\cdots (४)$

(३) और (४) को गुणा करने पर,

$$\frac{२क}{य}\times\frac{२य}{क}=(प+फ)\ (प-फ);$$

या, $४=प^{२}-फ^{२}$

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

उदाहरण ६. निम्न में से य को विलुप्त करो :—

$$\frac{क}{य}-खय=प+फ \cdots (१) \text{ और } \frac{ख}{य}-कय=प-फ \quad \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) को जोड़ने पर, $\frac{क+ख}{य}-य\ (क+ख)=२य$

$$\therefore \frac{१}{य}-य=\frac{२प}{क+ख} \quad \cdots\cdots (३)$$

(१) में से (२) को घटाने पर, $\frac{क-ख}{य}+य(क-ख)=२फ$

$$\therefore \frac{१}{य}+य=\frac{२फ}{क-ख} \quad \cdots\cdots (४)$$

(३) और (४) को जोड़ने पर, $\frac{२}{य}=\frac{२प}{क+ख}+\frac{२फ}{क-ख} \quad \cdots\cdots (५)$

(३) में से (४) घटाने पर, $-२य=\frac{२प}{क+ख}-\frac{२फ}{क-ख} \quad \cdots\cdots (६)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(५) और (६) को गुणा करने पर,

$$-४=\left(\frac{२प}{क+ख}\right)^{२}-\left(\frac{२फ}{क-ख}\right)^{२}$$

अर्थात्, $-४=\frac{४प^{२}}{(क+ख)^{२}}-\frac{४फ^{२}}{(क-ख)^{२}}$

अर्थात्, $१=\frac{फ^{२}}{(क-ख)^{२}}-\frac{प^{२}}{(क+ख)^{२}}$

यही अभीष्ट विलोपन फल है।

प्रश्नावली ५७

विलुप्त करो :—

१. $प+\frac{१}{प}=म$ और $प-\frac{१}{प}=न$ से प को

२. $क\left(य+\frac{१}{य}\right)=प$ और $ख\left(य-\frac{१}{य}\right)=फ$ में से य को

३. $क=\frac{य}{१+य^{२}}$ और $ख=\frac{य}{१-य^{२}}$ से य को

४. $क+\frac{१}{क}=म$ और $क^{२}+\frac{१}{क^{२}}=न$ में से क को

५. $क-\frac{१}{क}=प$ और $क^{२}-\frac{१}{क^{२}}=फ$ में से क को

६. $क-\frac{१}{क}=प$ और $क^{२}-\frac{१}{क^{२}}=ख^{२}$ में से क को

७. $\frac{१+य^{२}}{१-य^{२}}=प$ और $\frac{२य}{१-य^{२}}=फ$ से य को

८. $प^{३}+\frac{३}{प}=३२\ (क^{३}+ख^{३})$ और $३प+\frac{१}{प^{३}}=३२(क^{३}-ख^{३})$ से प को

९. $य=\frac{क^{२}+१}{२क}$ और $र=\frac{क^{२}-१}{२क}$ में से क को

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. $\frac{प}{ख}+\frac{ख}{प}=म$ और $\frac{प}{ख}-\frac{ख}{प}=न$ से प को

११. $पम+\frac{फ}{म}=क$ और $पम-\frac{फ}{म}=ख$ से म को

१२. $य+\frac{२}{य}=क$ और $य-\frac{२}{य}=ख$ से य को

१३. $५य+\frac{२}{य}=क$ और $२य+\frac{५}{य}=ख$ से य को

१४. $३य-\frac{२}{य}=प$ और $२य-\frac{३}{य}=फ$ से य को

१५. $कप+खफ+गम=०$ और $\frac{क}{प}+\frac{ख}{फ}+\frac{ग}{म}=०$ से क को

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्य १२

सरल युगपत् समीकरण
(SIMPLE SIMULTANEOUS EQUATIONS)

युगपत् समीकरण—हमने अब तक ऐसी समीकरणों के बारे में पढ़ा है जिनमें एक अज्ञात राशि होती है। अब हम ऐसी समीकरणों के बारे पढ़ेंगे जिनमें दो या तीन अज्ञात राशियाँ होती हैं।

निम्न समीकरण पर विचार करो :—

य + र = ९ .....(३)

इसमें य और र दो अज्ञात राशियाँ हैं। इस समीकरण में इन अज्ञात राशियों का मान निश्चित नहीं है, बल्कि एक का मान दूसरी पर निर्भर है, जैसा नीचे की तालिका से प्रकट होता है :—

यदि	य =	१	२	३	५	६	८	—४	—६
तो	र =	८	७	६	४	३	१	१३	१५

य तथा र के मानो के प्रत्येक जोड़े से समीकरण (१) सन्तुष्ट हो जाती है। अतः इस समीकरण को सन्तुष्ट करने के लिये य और र के मानों के असंख्य जोड़े हो सकते हैं।

अब निम्न समीकरण पर विचार करो :—

य — र = ३ .....(२)

इस समीकरण में भी अज्ञात राशियाँ य और र हैं। इसको भी सन्तुष्ट करने के लिये य और र के मानों के असंख्य जोड़े हो सकते हैं, जैसे :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि	य=	३	४	५	६	९	—४	—६	०
	=	०	१	२	३	६	—७	—९	—३

उपर्युक्त दोनों तालिकाओं को देखो और पता चलाओ कि य और र के क्या कोई ऐसे मान हैं जो दोनों में एक से हों। अतः समीकरणों (१) और (२) को एक साथ सन्तुष्ट करने के लिये य और र के निश्चित मान क्रमशः ६ और ३ हैं। इन मानों के अतिरिक्त और कोई ऐसे मान नहीं है जो दोनों समीकरणों को एक साथ सन्तुष्ट कर सकें।

अतः ऐसे समीकरण जिनमें अज्ञात राशियाँ दो अथवा अधिक हों और जो अज्ञात राशियों के एक ही मानों से साथ-साथ सन्तुष्ट हो जावे युगपत् समीकरण (Simultaneous equations) कहलाते हैं।

यदि प्रत्येक समीकरण में अज्ञात राशियों की घात इकाई हो तो ऐसे समीकरणों को सरल युगपत् समीकरण (simultaneous equations) कहते हैं।

निम्नलिखित समीकरणों पर विचार करो :—

$$३य+४र=७ \quad \cdots\cdots(१)$$
$$६य+८र=१४ \quad \cdots\cdots(२)$$

दूसरी समीकरण पहली समीकरण को २ से गुणा करने पर प्राप्त हो जाती है। य और र के मानों के कितने ही जोड़े इन समीकरणों को एक साथ सन्तुष्ट कर देते हैं, इसलिये इनमें अज्ञात राशियों के मान निश्चित नहीं हैं। अतः ये समीकरण युगपत् समीकरण नहीं हैं।

अतः युगपत् समीकरणों को हल करने के लिये निम्न दो बातों का ध्यान रखना चाहिये :—

(१) युगपत् समीकरणों को हल करने के लिये उतनी ही समीकरणों की आवश्यकता होती है जितनी उनमें अज्ञात राशियाँ हैं। दो अज्ञात राशियों का

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान ज्ञात करने के लिये दो समीकरणों तथा तीन के लिये तीन समीकरणें चाहिये।

(२) दी हुई समीकरणें एक-दूसरे से स्वतन्त्र होनी चाहिये; जैसे—य+र=५ और २य+२र=१० स्वतन्त्र नहीं हैं क्योंकि पहली समीकरण को २ गुणा करके दूसरी समीकरण प्राप्त हो जाती है। वास्तव में ये दोनों समीकरणें एक ही समीकरण के दो रूप हैं।

सरल युगपत् समीकरणों को हल करने की विधियाँ :—

प्रतिस्थापन विधि (Method of Substitution)

एक समीकरण से एक अज्ञात राशि का मान दूसरी अज्ञात राशि के पदों में ज्ञात करके इस मान को दूसरी समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं। इस प्रकार प्राप्त हुई समीकरण से दूसरी अज्ञात राशि का मान ज्ञात कर लेते हैं और इस मान को पहली समीकरण में प्रतिस्थापित करके पहली अज्ञात राशि का भी मान ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण—५य+र=१४ और १५य—२र=—३ को हल करो।

$$५य+र=१४ \quad \cdots\cdots(१)$$

$$१५य-२र=-३ \quad \cdots\cdots(२)$$

समीकरण (१) से, ५य=१४—र

अर्थात्, $य=\frac{१४-र}{५}$

समीकरण (२) में य का यह मान रखने पर,

$$\frac{१५\,(१४-र)}{५}-२र=-३ \quad \cdots\cdots(३)$$

अर्थात्, ४२—३र—२र=—३ ; अर्थात्, —५र=—४५

$$\therefore \quad र=\frac{-४५}{-५}=९$$

समीकरण (१) में र=९ रखने पर, ५य+९=१४

अर्थात्, ५य=१४—९=५, ∴ य=१

अतः, य=१, र=९ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सत्यापन : ५य + र = ५ × १ + १ × ९ = १४
और १५य − २र = १५ × १ − २ × ९ = − ३

प्रश्नावली ५८

हल करो :—

१. य + र = १०
य − र = ६

२. ७य − २र = ५
११य + ५र = १६

३. ५य − २र = ११
५य + ३र = − ४

४. ३य − ७र = ०
५य − १२र = १

५. ४य − ५र + ३ = ०
य + र − ३ = ०

६. ३य = ४र − ९
७र = ८य + १३

७. ५य = ६र
२य − ५र + १३ = ०

८. य + र − ३ = ०
४य − ५र + ६ = ०

तुलनात्मक विधि (Method of Comparison)

हम विधि में प्रत्येक समीकरण से एक अज्ञात राशि का मान दूसरी अज्ञात राशि के पदों में निकाल कर उन दोनों मानों को बराबर रख (तुलना कर) लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरण से उस अज्ञात राशि का मान ज्ञात करके वह मान दी हुई समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित कर देते हैं तथा दूसरी अज्ञात राशि का मान भी ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण—३य + ४र = २५, ५य − ६र = − ९ को हल करो।

३य + ४र = २५ ·····(१)

५य − ६र = − ९ ·····(२)

(१) से, ३य = २५ − ४र

$$\therefore \quad य = \frac{२५ - ४र}{३} \quad \cdots\cdots(३)$$

(२) से, ५य = ६र − ९

$$\therefore \quad य = \frac{६र - ९}{५} \quad \cdots\cdots(४)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(३) और (४) को बराबर रख कर,

$$\frac{२५-४र}{३}=\frac{६र-९}{५}$$

अर्थात्, ५ (२५—४र) = ३ (६र—९)

अर्थात्, १२५—२०र = १८र—२७

अर्थात्, —२०र—१८र = —२७—१२५

अर्थात्, —३८र = —१५२

अर्थात्, $र = \frac{-१५२}{-३८} = ४$

समीकरण (१) में र = ४ रखने पर, ३य + ४ × ४ = २५

अर्थात्, ३य = २५—१६ = ९ ; ∴ य = ३

∴ य = ३, र = ४ उत्तर

प्रश्नावली ५९

हल करो :—

१. २य + र = ८
   य + ३र = ९

२. ४य + ५र = १२
   ६य + ९र = १८

३. ३य—४र = —२
   २य—६र = २

४. १२य—४र = ०
   १०य—४र = १६

५. ३र = ८य + १६
   २य + ३र = १९

६. ३य—२र = ५
   ४य + २र = ०

७. ७य = ३र
   ५र—१४ = ४य + ९

८. य + र—३ = ०
   ४य—५र + ६ = ३

एक ज्ञात राशी के गुणाकों को समान करके (Method of equalising coefficients)—इस विधि में दोनों समीकरणों में किसी एक अज्ञात राशि के गुणांक समान कर लेते हैं। ऐसा करने के लिये दोनों समीकरणों को पृथक्-पृथक् ऐसी संख्याओं से गुणा करते हैं जिससे एक अज्ञात राशि के गुणांक बराबर हो जावें। यदि ये गुणांक समान चिह्नों के हों तो एक समीकरण से दूसरी समीकरण घटा लेते हैं। यदि ये गुणांक विपरीत चिह्नों के हों तो दोनों

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समीकरणों को जोड़ लेते हैं। ऐसा करने से एक अज्ञात राशि लुप्त हो जाती है और दूसरी अज्ञात राशि वाला एक समीकरण प्राप्त कर लेते हैं। इस समीकरण से दूसरी अज्ञात राशि का मान ज्ञात करके वह मान दी हुई किसी एक समीकरण में प्रतिस्थापित कर लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरण से पहली अज्ञात राशि का मान भी ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण—४य + ५र = १४, ६य + ७र = २० को हल करो।

४य + ५र = १४ .....(१)

६य + ७र = २० .....(२)

दोनों समीकरणों में य के गुणांक बराबर करने के लिए, समीकरण (१) को ३ तथा समीकरण (२) को २ से गुणा करके,

१२य + १५र = ४२ .....(३)

१२य + १४र = ४० .....(४)

(३) में से (४) घटाने पर, र = २

(१) में र = २ रखने पर, ४य + १० = १४

अर्थात्, ४य = १४ − १० = ४ ; ∴ य = १

∴ य = १, र = २ उत्तर

सूचना : साधारणतया इस विधि का ही प्रयोग किया जाता है। इसको विलोपन विधि (Method of elimination) भी कहते हैं।

प्रश्नावली ६०

हल करो :—

१. ३य + ७र २९
२य − ३र = ४

२. ८य + १०र = २८
६य + ५र = १६

३. य + २र = १०
य + र = ४

४. य + र = ३०
य − र = १०

५. ७य + ३र = १८
४य − ५र = ३१

६. य = १६ − २र
र = य − ७

७. ७य + ६र = ७१
५य − ८र = −२३

८. १४य + १०र = −४८
१०य + १४र = ०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वज्रगुणन (Cross-multiplication) की विधि

इस विधि को समझने के लिए निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन करो :—

उदाहरण : $क_1य+ख_1र+ग_2=0$ तथा $क_2य+ख_2य+ग_2=0$ को हल करो।

$$क_1य+ख_1र+ग_1=0 \quad \cdots\cdots(१)$$

$$क_2य+ख_2र+ग_2=0 \quad \cdots\cdots(२)$$

समीकरण (१) को $क_2$ से और समीकरण (२) को $क_1$ से गुणा करके,

$$क_1क_2य+ख_1क_2र+ग_1क_2=0 \quad \cdots\cdots(३)$$

$$क_1क_2य+क_1ख_2र+ग_2क_1=0 \quad \cdots\cdots(४)$$

(३) में से (४) घटाने पर,

$$ख_1क_2र-क_1ख_2र+ग_1क_2-ग_2क_1=0$$

अर्थात्, $(ख_1क_2-क_1ख_2)र=ग_2क_1-ग_1क_2$

$$\therefore \quad \frac{र}{ग_2क_1-ग_1क_2}=\frac{१}{ख_1क_2-क_1ख_2}$$

या, $$\frac{र}{ग_1क_2-ग_2क_1}=\frac{१}{क_1ख_2-ख_1क_2} \quad \cdots\cdots(५)$$

पुनः, (१) को $ख_2$ से और (२) को $ख_1$ से गुणा करके,

$$क_1ख_2य+ख_1ख_2र+ख_2ग_1=0 \quad \cdots\cdots(६)$$

$$क_2ख_1य+ख_1ख_2र+ग_2ख_1=0 \quad \cdots\cdots(७)$$

(६) से (७) घटाकर,

$$क_1ख_2य-क_2ख_1य+ख_2ग_1-ग_2ख_1=0$$

या, $(क_1ख_2-क_2ख_1)\,य=ग_2ख_1-ग_1ख_2$

$$\therefore \quad \frac{य}{ग_2ख_1-ग_1ख_2}=\frac{१}{क_1ख_2-क_2ख_1} \quad \cdots\cdots(८)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(५) और (८) से,

$$\frac{य}{ग_2 ख_1 - ग_1 ख_2} = \frac{र}{ग_1 क_2 - ग_2 क_1}$$

$$= \frac{१}{क_1 ख_2 - क_2 ख_1}$$

$$\therefore \; य = \frac{ग_2 ख_1 - ग_1 ख_2}{क_1 ख_2 - क_2 ख_1} \text{ और } र = \frac{ग_1 क_2 - ग_2 क_1}{क_1 ख_2 - क_2 ख_1}$$

इस तिथि को वज्रगुणन (Cross-multiplication) की विधि कहते हैं क्योंकि इसमें य, र और १ के हरों को प्राप्त करने के लिये आर-पार के गुणांकों को गुणा किया गया है।

इन हरों को प्राप्त करने के लिए निम्न बातों को याद रखना चाहिए :—

(१) दोनों समीकरणों को कय + खय + ग = ० के रूप में लिखो।

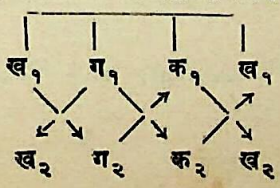
(२) ग को १ का गुणांक माना जाता है।

(३) य का हर = (पहले समीकरण में र का गुणांक × दूसरे समीकरण में १ का गुणांक)—(पहले समीकरण में १ का गुणांक × दूसरे समीकरण में र का गुणांक)

(४) र का हर = (पहले समीकरण में १ का गुणांक × दूसरे समीकरण में य का गुणांक)—(पहले समीकरण में य का गुणांक × दूसरे समीकरण में १ का गुणांक)

(५) १ का हर = (पहले समीकरण में य का गुणांक × दूसरे समीकरण का र का गुणांक)—(पहले समीकरण में र का गुणांक × दूसरे समीकरण में य का गुणांक)

इन नियमों को याद रखने में निम्नांकित चित्र सहायक होगा :—



Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

गुणांकों का आर-पार गुणा करना चाहिए। नीचे की ओर के तीर यह प्रकट करते हैं कि गुणनफल धनात्मक है और ऊपर की ओर के तीर यह प्रकट करते हैं कि गुणनफल ऋणात्मक है। गुणांकों का गुणनफल प्राप्त करने में चिह्नों के अनुसार गुणा करना चाहिए।

टिप्पणी—यदि किसी राशि का कोई गुणांक नहीं होता है तो उसका गुणांक १ समझा जाता है।

उदाहरण : ३य + र = २८ और ३र + य = १२ को हल करो।

३य + र = २८ .....(१)

३र + य = १२ .....(२)

अर्थात्, ३य + र − २८ = ० .....(३)

य + ३र − १२ = ० .....(४)

वज्रगुणन की रीति से,

$$\frac{\text{य}}{१(-१२)-(-२८)३} = \frac{\text{र}}{(-२८)\times १-३(-१२)}$$

$$= \frac{१}{३\times ३-१\times १}$$

अर्थात्, $$\frac{\text{य}}{-१२+८४} = \frac{\text{र}}{-२८+३६} = \frac{१}{९-१}$$

अर्थात्, $$\frac{\text{य}}{७२} = \frac{\text{र}}{८} = \frac{१}{८}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{७२}{८} = ९ \text{ और } \text{र} = \frac{८}{८} = १$$

$\therefore$ य = ९, र = १ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ६१

हल करो :—

१. २य+र=१८
य − ३र = — ३३

२. ८य—९र=१
६य— ११र=—१

३. ७य+४र=५८
१४य+२र=९२

४. ६य—७र=१६
९य—५र=३५

५. ४य+३र=०
७य—२र=२९

६. २य—३र=०
२य+३र=६०

७. ११य+६र—४०=०
—७य+३र=—५

८. १४य+१५र—११६
३२य—२७र—२०

कुछ अन्य उदाहरण (Some Solved Examples)

उदाहरण १. हल करो :—

७(य—र)+३(य+र)=१६ .....(१)
८(य+र)—५(य—र)=१९ .....(२)

अर्थात्, ७य—७र+३य+३र=१६
८य+८र—५य+५र=१९

अर्थात्, १०य—३र=१६ .....(३)
३य+१३र=१९ .....(४)

(३) को ३ तथा (४) को १० से गुणा करने पर,

३०य—१२र=४८ .....(५)
३०य+१३०र=१९० .....(६)

(५) से (६) घटाने पर, —१४२र=—१४२

$$\therefore \quad र=\frac{-१४२}{-१४२}-१$$

(३) में र—१ रख कर, १०य—४×१=१६
अर्थात्, १०य=१६+४=२० ; ∴ य=२

∴ य=२ तथा र=१। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. हल करो :—

$$\frac{य+र-३}{२}=\frac{य+२र-४}{३}=\frac{३य+र}{११}$$

इसको दो समीकरणों में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

$$\frac{य+र-३}{२}=\frac{३य+र}{११} \quad \cdots\cdots(१)$$

तथा $$\frac{य+२र-४}{३}=\frac{३य+र}{११} \quad \cdots\cdots(२)$$

अर्थात्, ११(य+र−३) = २(३य+र)

११(य+२र−४) = ३(३य+र)

अर्थात्, ११य+११र−३३ = ६य+२र

११य+२२र−४४ = ९य+३र

अर्थात्, ११य+११र−६य−२र = ३३

११य+२२र−९य−३र = ४४

अर्थात्, ५य+९र = ३३ ·····(३)

२य+१९र = ४४ ·····(४)

(३) को २ तथा (४) को ५ से गुणा करके,

१०य+१८र = ६६ ·····(५)

१०य+९५र = २२० ·····(६)

(५) से (६) घटाने पर, −७७र = −१५४

$$\therefore \quad र=\frac{-१५४}{-७७}=२$$

(३) में र = २ रखने पर, ५य+९×२ = ३३

अर्थात्, ५य = ३३−१८ = १५ ; ∴ य = ३

∴ य = ३, र = २ उत्तर

उदाहरण ३. ·५य+·८र = ३·४ तथा ·६य+र = ४·२ को हल करो।

·५य+·८र = ३·४ ·····(१)

·६य+र = ४·२ ·····(२)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(२) को ·८ से गुणा करके,

$$\cdot ५य + \cdot ८र = ३\cdot ४ \quad \cdots\cdots(३)$$

$$\cdot ४८य + \cdot ८र = ३\cdot ३६ \quad \cdots\cdots(४)$$

(३) से (४) घटाने पर, $\cdot ०२य = \cdot ०४$

$$\therefore \quad य = \frac{\cdot ०४}{\cdot ०२} = २$$

(२) में य = २ रखने पर, $\cdot ६ \times २ + र = ४\cdot २$

अर्थात्, $र = ४\cdot २ - १\cdot २ = ३$; $\therefore$ य = २, र = ३ उत्तर

प्रश्नावली ६२

हल करो :—

१. $३(५य - ९) + १६ = २(र + ३)$
$२(३य - ७) + २६ = ३(र + ७)$

२. $३(य + र) + २(य - ३र) = १$
$२(य + २र) - ५(य - २र) = ३(र + ३)$

३. $\frac{१}{२}(२य + ३र) + \frac{२}{३}य = ८$
$\frac{१}{२}(७र - ३य) - र = ११$

४. $५य - ३र = \frac{२}{३}(य + र) = य + र - ८$

५. $\frac{५य + ३र + ७}{२} = \frac{४य + ५र + ६}{३} = \frac{३य + ७र + ९}{९}$

६. $\frac{य + र}{य + ४} = \frac{४य - र}{३र - ३} = \frac{५}{६}$

७. $\frac{२य}{३} + \frac{३र}{५} = १७, \quad \frac{३य}{४} + \frac{२र}{२} = १९$

८. $\frac{य + र}{२} + \frac{३य + ५र}{४} = २, \quad \frac{२य}{७} + \frac{र}{९} = ३$

९. $\frac{य}{७} + २र = ९९, \quad \frac{र}{७} + ७य = ५६$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. $\frac{य+४}{८}-\frac{य-र-१}{२}=२य-६$

$२र-१-\frac{३य-२र}{२}=\frac{३}{२}य$

११. $\frac{य}{३}+३र=\frac{३२}{३}$, $३य+\frac{र}{३}=१६$

१२. $·२य+·३र=१·८$, $·५य+·७र=४·३$

१३. $·३य+·५र=४·५$, $·२य+·४र=३·४$

१४. $२·५य+४·२र=४०$, $७·५य+८·४र=६९·६$

१५. $५य-४र+१६=५र-२य+१$

$(र+२)(य-५)+२१=(र-३)(य+५)+१$

व्युत्क्रम समीकरण (Reciprocal Equations), अर्थात् ऐसी समीकरणें जिनमें अज्ञात राशियाँ केवल हर में हों।

उदाहरण १. हल करो :—

$$\frac{३}{य}+\frac{२}{र}=१३ \quad \cdots\cdots(१)$$

$$\frac{४}{य}-\frac{१}{र}=१० \quad \cdots\cdots(२)$$

(२) को २ से गुणा करने पर,

$$\frac{३}{य}+\frac{२}{र}=१३ \quad \cdots\cdots(३)$$

$$\frac{८}{य}-\frac{२}{र}=२० \quad \cdots\cdots(४)$$

(३) और (४) को जोड़ने पर,

$\frac{११}{य}=३३$; अर्थात्, $३३य=११$

$\therefore \quad य=\frac{११}{३३}=\frac{१}{३}$

(१) में $य=\frac{१}{३}$ रखने पर, $\frac{३}{\frac{१}{३}}+\frac{२}{र}=१३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $९+\frac{२}{र}=१३$; अर्थात्, $\frac{२}{र}=४$

$\therefore \quad ४र=२$; या, $र=\frac{२}{४}=\frac{१}{२}$

$\therefore \quad य=\frac{१}{३}, र=\frac{१}{२}$ उत्तर

उदाहरण २. हल करो :—

$य+र=५यर$ .....(१)

$य-र=९यर$ .....(२)

(१) और (२) को य र से भाग करके,

$\frac{१}{र}+\frac{१}{य}=५$ .....(३)

$\frac{१}{र}-\frac{१}{य}=९$ .....(४)

(३) और (४) को जोड़ने पर, $\frac{२}{र}=१४$

अर्थात्, $१४र=२$; $\therefore \quad र=\frac{२}{१४}=\frac{१}{७}$

(३) में $र=\frac{१}{७}$ रखने पर, $\frac{१}{\frac{१}{७}}+\frac{१}{य}=५$

अर्थात्, $७+\frac{१}{य}=५$; अर्थात्, $\frac{१}{य}=-२$

$\therefore \quad -२य=१$; $\therefore \quad य=-\frac{१}{२}$

$य=-\frac{१}{२}, र=\frac{१}{७}$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ६३

हल करो :—

१. $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=८$

$\frac{१}{य}-\frac{१}{र}=२$

२. $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=९$

$\frac{२}{य}-\frac{३}{र}=-७$

३. $\frac{७}{य}-\frac{५}{र}=१४$

$\frac{५}{य}-\frac{७}{र}=-३८$

४. $\frac{७}{य}+\frac{९}{र}=\frac{४}{५}$

$\frac{३}{य}+\frac{२}{र}=-\frac{१}{३५}$

५. $\frac{४}{३य}-\frac{३}{४र}=\frac{१}{२}$

$\frac{२}{य}-\frac{२}{र}=-१$

६. $\frac{१}{५य}+\frac{१}{९र}=५$

$\frac{१}{३य}+\frac{१}{२र}=१४$

७. $\frac{१}{४य}+२र=५$

$\frac{१}{८य}-\frac{१}{६}\ र=\frac{१}{६}$

८. $\frac{५}{य}+३र=८$

$\frac{४}{य}-१०र=५६$

९. $५य+४र=३१यर$

$-२य+३र=६यर$

१०. $६य+९र=१५यर$

$३य+६र=५यर$

११. $\frac{·७}{य}+\frac{·४}{र}=·१५$

$\frac{१·१}{य}+\frac{·६}{र}=·२३$

१२. $\frac{य+र}{यर}=५$

$\frac{य-र}{यर}=३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. $य+र = ५यर, \frac{१}{य} - \frac{१}{र} = ६$

१४. $\frac{यर}{य+र} = \frac{१}{२}, \frac{यर}{य-र} = १$

१५. $\frac{यर}{य+र} = \frac{१}{५}, \frac{यर}{२य+३र} = \frac{१}{१२}$

विशेष प्रकार की युगपत् समीकरण

उदाहरण १. हल करो :—

$$\frac{३}{य+र} + \frac{२}{य-र} = ६ \quad \cdots\cdots(१)$$

$$\frac{२}{य+र} - \frac{३}{य-र} = -\frac{१}{३} \quad \cdots\cdots(२)$$

समीकरण (१) और (२) में $य+र = \frac{१}{क}$ और $य-र = \frac{१}{ख}$ रखने पर,

$$३क + २ख = ६ \quad \cdots\cdots(३)$$

$$२क - ३ख = -\frac{१}{३} \quad \cdots\cdots(४)$$

(३) को ३ तथा (४) को २ से गुणा करने पर,

$$९क + ६ख = १८ \quad \cdots\cdots(५)$$

$$४क - ६ख = -\frac{२}{३} \quad \cdots\cdots(६)$$

या, $१३क = \frac{५२}{३}$, जोड़ने पर

$$\therefore \; क = \frac{५२}{३ \times १३} = \frac{४}{३}$$

$४ + २ख = ६$, (३) में क का मान रखने पर

$\therefore \; ख = १$

$$\therefore \quad य+र = \frac{१}{क} = \frac{३}{४} \quad \cdots\cdots(७)$$

$$और \; य-र = \frac{१}{ख} = १ \quad \cdots\cdots(८)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ $य = \frac{७}{४ \times २} = \frac{७}{८}$; (७) और (८) को जोड़ने पर,

और $र = -\frac{१}{४ \times २} = -\frac{१}{८}$; (७) से (८) घटाने पर

$\therefore$ $य = \frac{७}{८}$ और $र = -\frac{१}{८}$ उत्तर

उदाहरण २. हल करो :—

$२यर + ३ = ४र$ .....(१)

$३यर + २ = ५र$ .....(२)

टिप्पणी : ऐसे प्रश्नों में यर को विलुप्त करो।

(१) को ३ तथा (२) को २ से गुणा करके,

$६यर + ९ = १२र$ .....(३)

$६यर + ४ = १०र$ .....(४)

(३) से (४) घटाकर, $५ = २र$, $\therefore$ $र = \frac{५}{२}$

(१) में $र = \frac{५}{२}$ रखने पर, $२य \times \frac{५}{२} + ३ = ४ \times \frac{५}{२}$

या, $५य + ३ = १०$

या, $५य = १० - ३$; $\therefore$ $य = \frac{७}{५} = १\frac{२}{५}$

$\therefore$ $य = १\frac{२}{५}$, $र = \frac{५}{२}$ उत्तर

प्रश्नावली ६४

हल करो :—

(१) $\frac{३}{य+र} + \frac{२}{य-र} = \frac{७}{४}$, (२) $\frac{८}{य+र} + \frac{३}{य-र} = ५\frac{२}{३}$

$\frac{४}{य+र} + \frac{३}{य-र} = \frac{५}{२}$ $\frac{३}{य+र} - \frac{१}{य-र} = ०$

(३) $\frac{८}{य+२र} + \frac{३}{२य-र} = ३$ (४) $\frac{५}{य+२} + \frac{३}{य-र} = -\frac{१}{६}$

$\frac{१२}{य+२र} - \frac{६}{२य-र} = १$ $\frac{३}{य+२} + \frac{७}{र-१} = \frac{५}{२}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. $\frac{१}{य-१}+\frac{१}{र-२}=२$

$\frac{२}{य-१}+\frac{३}{र-२}=५$

६. $\frac{३}{य-२}+\frac{४}{र+१}=१$

$\frac{७}{२(य-२)}+\frac{२५}{३(र+१)}=३$

७. ६यर + ३ = २५र

५यर + ६ = २२र

८. ७यर − ३२य = ९

५यर − २७य = − ६

आक्षरिक गुणांक वाले समीकरण

(Equations with Literal Coefficients)

उदाहरण १. हल करो :—

कय + खर = ३ग ……(१)

य + र = ग ……(२)

(२) को क से गुणा करके,

कय + खर ३ग ……(३)

कय + कर = कग ……(४)

खर − कर = ३ग − कग, (३) से (४) घटा कर

अर्थात्, र(ख − क) = ग(३ − क)

$\therefore \quad र = \frac{ग(३-क)}{ख-क}$

पुनः, (२) को ख से गुणा करके,

कय + खर = ३ग ……(५)

खय + खर = खग ……(६)

कय − खय = ३ग − खग, (५) से (६) घटा कर

अर्थात्, य(क − ख) = ग(३ − ख)

$\therefore \quad य = \frac{ग(३-ख)}{क \quad ख}$

$\therefore \quad य = \frac{ग\ ३-ख)}{क-ख}, \quad र = \frac{ग(३-क)}{ख-क}$ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. हल करो :—

$$\frac{क}{य}+\frac{ख}{र}=प \quad \cdots\cdots(१)$$

$$\frac{ख}{य}-\frac{क}{र}=फ \quad \cdots\cdots(२)$$

(१) को क तथा (२) को ख से गुणा करने पर,

$$\frac{क^२}{य}+\frac{कख}{र}=कप \quad \cdots\cdots(३)$$

$$\frac{ख^२}{य}-\frac{कख}{र}=खफ \quad \cdots\cdots(४)$$

(३) और (४) को जोड़ने पर,

$$\frac{क^२}{य}+\frac{ख^२}{य}=कप+खफ$$

अर्थात्, $\frac{१}{य}(क^२+ख^२)=कप+खफ$

अर्थात्, $य(कप+खफ)=क^२+ख^२$

$$\therefore \quad य=\frac{क^२+ख^२}{कप+खफ}$$

पुनः, (१) को ख तथा (२) को क से गुणा करने पर,

$$\frac{कख}{य}+\frac{ख^२}{र}=पख \quad \cdots\cdots(५)$$

$$\frac{कख}{य}-\frac{क^२}{र}=फक \quad \cdots\cdots(६)$$

(५) से (६) घटाने पर,

$$\frac{ख^२}{र}+\frac{क^२}{र}=पख-फक$$

अर्थात्, $\frac{१}{र}(ख+क^२)=पख-फक$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $र(पख - फक) = ख^२ + क^२$

अर्थात्, $र = \frac{ख^२ + क^२}{पख - फक}$

$\therefore\ य = \frac{क^२ + ख^२}{कप + खफ'},\ र = \frac{ख^२ + क^२}{पख - फक}$ उत्तर

प्रश्नावली ६५

हल करो :—

१. $य + खर = ग$
$खय - गर = प$

२. $कय + खग = ग$
$३कय + ४खर = ब$

३. $(क + ख)\ य - (क - ख) र = ४कख$
$(क + ख) र - (क - ख)\ य = कख$

४. $पय + फर = २पफ$
$य - र = फ - प$

५. $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख} = ५$
$\frac{य}{क} - \frac{र}{ख} = १$

६. $\frac{य}{प} - \frac{र}{फ} = म$
$\frac{य}{प} + \frac{र}{फ} = न$

७. $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = क$
$\frac{१}{य} - \frac{१}{र} = ख$

८. $\frac{क}{य} + \frac{ख}{र} = म$
$\frac{क}{य} - \frac{ख}{र} = प$

तीन अज्ञात राशियों वाले समीकरण
(Equations Involving Three Unknown Quantities)

जिस प्रकार दो अज्ञात राशियों का मान निकालने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ती है, इसी प्रकार तीन अज्ञात राशियों का मान ज्ञात करने के लिए तीन समीकरणों की आवश्यकता होती है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

निम्न समीकरणों पर विचार करो :—

य+र+ल=१२

३य+२र−४ल=−३

२य−३र+४ल=१४

उपर्युक्त तीन समीकरणों में तीन अज्ञात राशियाँ य, र तथा ल हैं। इनको हल करने का अर्थ है कि य, र तथा ल के ऐसे मान ज्ञात करो जो इन तीन समीकरणों को एक साथ सन्तुष्ट कर दें। अतः ये समीकरण तीन अज्ञात राशियों वाले युगपत् समीकरण हैं।

इन समीकरणों का साधारणतया दो विधियों से हल करते हैं, जैसे नीचे समझाया गया है :—

विलोपन विधि
(Method of Elimination)

(१) तीन समीकरणों में से कोई से दो समीकरणों का एक जोड़ा लेते हैं और उनमें से एक अज्ञात राशि विलुप्त करके एक ऐसा समीकरण प्राप्त करते हैं जिसमें केवल दो अज्ञात राशियाँ हैं।

(२) सुविधानुसार फिर दो समीकरणों का एक दूसरा जोड़ा लेते हैं और उनमें से भी वही अज्ञात राशि लुप्त करके एक नई समीकरण बनाते हैं।

(३) इस प्रकार हमारे पास दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरण हो जायेंगे जिनको हम हल कर लेंगे।

(४) इस प्रकार प्राप्त किये हुए दो अज्ञात राशियों के मान हम दी हुई समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित करके तीसरी अज्ञात राशि का मान ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण : हल करो :—

य+र+ल=१२ ·····(१)

३य+२र−४ल=−३ ·····(२)

२य−३र+४ल=१४ ·····(३)

मान लिया कि हमें ल को विलुप्त करना है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समीकरण (१) को (४) से गुणा करने पर,

४य+४र+४ल=४८ .....(४)

(२) और (४) को जोड़ने पर,

७य+६र=४५ .....(५)

(२) और (३) को जोड़ने पर,

५य−र=११ .....(६)

समीकरण (५) और (६) को हल करने पर,

य=३, र=४

(१) में य तथा र के मान रखने पर,

३+४+ल=१२

या ल=१२−३−४=५

∴ य=३, र=४, ल=५ उत्तर

प्रश्नावली ६६

हल करो :—

१. य+र+ल=१०
२य+३र+४ल=३३
३य−५र+७ल=२६

२. य+२र+३ल=२०
२य+३र−५ल=−७
४य−५र+७ल=२१

३. १२य+९र−७ल=२
८य−२६र+९ल=१
२३य+२१र−१५ल=४

४. य−२(३र−२ल)=०
२र+२(य−ल)=०
५य+७र+९ल=६७

५. य+३र+५ल=१०
३य+५र+७ल=१४
५य+७र+८ल=१५

६. य+र+ल=०
२य+३र+४ल=−२
५य+८र−ल=६

वज्रगुणन की विधि
(Method of Cross-multiplication)

निम्न प्रकार के समीकरणों को वज्रगुणन की विधि से हल करना सरल होता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण : हल करो :—

$$५य + ६र + ८ल = ०$$ .....(१)

$$३य + ४र + ६ल = ०$$ .....(२)

$$य + ५र + १६ल = ३$$ .....(३)

हम जानते हैं कि समीकरण (१) और (२) की वज्रगुणा से,

$$\frac{य}{६ \times ६ - ८ \times ४} = \frac{र}{८ \times ३ - ५ \times ६} = \frac{ल}{५ \times ४ - ६ \times ३}$$

अर्थात्, $\frac{य}{३६ - ३२} = \frac{र}{२४ - ३०} = \frac{ल}{२० - १८}$

अर्थात् $\frac{य}{४} = \frac{र}{-६} = \frac{ल}{२} = म$ (मान लिया)

$\therefore$ $य = ४म,\ र = -६म,\ ल = २म$

समीकरण (३) में य, र तथा ल के ये मान रख कर,

$$४म + ५(-६म) + १६ \times २म = ३$$

अर्थात्, $४म - ३०म + ३२म = ३$

अर्थात्, $६म = ३$; $\therefore$ $म = \frac{३}{६} = \frac{१}{२}$

$\therefore$ $य = ४ \times \frac{१}{२} = २;\ र = -६ \times \frac{१}{२} = -३$ तथा

$ल = २ \times \frac{१}{२} = १$

$\therefore$ $य = २\ र = -३$ तथा $ल = १$ उत्तर

टिप्पणी : इस विधि का उपयोग करने के लिए यह आवश्यक है कि तीन समीकरणों में से कम से कम दो समीकरणों में केवल तीन-तीन पद होने चाहिए।

प्रश्नावली ६७

हल करो :—

१. $३य + २र + २ल = ०$
$६य + २र + ३ल = ०$

२. $२य - ३र + ४ल = ०$
$७य + २र - ६ल = ०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. २य + र + ल = १
५य − र = २ल
३य − ७र + ६ल = ०
७य + ५र = १०ल

४. ४य + ६र + ल = ३७
य − २र + ल = ०
११य + २र = ११ल
२य + र + ३ल = ६७

५. ४य − १३र + ८ल = ७य + ६र − ९ल = ०

$$\frac{५}{य} + \frac{८}{र} + \frac{१५}{ल} = \frac{२०}{३}$$

६. य − २र + ल = ०, ५य − ६र + २ल = ०, २य² + ३र² + ४ल² = ९९

विशेष प्रकार की समीकरण

उदाहरण १. हल करो :—

य + र = ३ .....(१)
र + ल = ५ .....(२)
ल + य = ४ .....(३)

(१) २) और (३) को जोड़ने पर,

२य + २र + २अ = १२

अर्थात्, २ (य + र + ल) = १२

∴ य + र + ल = $\frac{१२}{२}$ = ६ .....(४)

(४) में से (१) घटाने पर, ल = ३
(४) में मे (२) घटाने पर, य = १
(४) में से (४) घटाने पर, र = २ } उत्तर

उदाहरण २. हल करो :—

$$\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = ७ \quad .....(१)$$

$$\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = ९ \quad .....(२)$$

$$\frac{१}{ल} + \frac{१}{य} = ८ \quad .....(३)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१), (२) तथा (३) को जोड़ने पर,

$$\frac{२}{य}+\frac{२}{र}+\frac{२}{ल}=२४$$

$$२\left(\frac{१}{य}+\frac{१}{र}+\frac{१}{ल}\right)=२४$$

$$\therefore \quad \frac{१}{य}+\frac{१}{र}+\frac{१}{ल}=\frac{२४}{२}=१२ \qquad \cdots\cdots(४)$$

(४) से (१) घटाने पर, $\frac{१}{ल}=५$; $\therefore$ ल$=\frac{१}{५}$

(४) से (२) घटाने पर, $\frac{१}{य}=३$; $\therefore$ य$=\frac{१}{३}$ } उत्तर

(४) से (३) घटाने पर, $\frac{१}{र}=४$: $\therefore$ र$=\frac{१}{४}$

उदाहरण ३. हल करो :—

$$\frac{यर}{य+र}=\frac{१}{७}, \quad \frac{रल}{र+ल}=\frac{१}{९}, \quad \frac{यल}{य+ल}=\frac{१}{८}$$

वज्रगुणन करने पर,

य+र=७यर, अर्थात्, $\frac{१}{र}+\frac{१}{य}=७$ ·····(१)

र+ल=९रल, अर्थात् $\frac{१}{ल}+\frac{१}{र}=९$ ·····(२)

य+ल=८यल, अर्थात् $\frac{१}{ल}+\frac{१}{य}=८$ ·····(३)

(१), (२) तथा (३) को जोड़ने पर,

$\frac{१}{य}+\frac{२}{र}+=२४$; या $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}+\frac{१}{ल}=१२$ ·····(४)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(७) से (४) घटाने पर, $\frac{१}{ल}=५$, ∴ $ल=\frac{१}{५}$

(७) से (५) घटाने पर, $\frac{१}{य}=३$, ∴ $य=\frac{१}{३}$ } उत्तर

(७) से (६) घटाने पर, $\frac{१}{र}=४$, ∴ $र=\frac{१}{४}$

उदाहरण ४. हल करो :—

यर=६ .....(१)

रल=१२ .....(२)

यल=८ .....(३)

(१), (२) और (३) को परस्पर गुणा करने पर,

$य^२र^२ल^२=६\times१२\times८$

या, $यरल=\pm\sqrt{६\times१२\times८}=\pm२४$ .....(४)

(४) को (१) से भाग करके, ल=±४

(४) को (२) से भाग करके, य=+२

(४) को (३) से भाग करके, र=+३

उदाहरण ५. हल करो :—

य(र+ल)=२५

र(य+ल)=२१

ल(य+र)=१६

अर्थात्, यर+यल=२५ .....(१)

यर+रल=२१ .....(२)

यल+रल=१६ .....(३)

(१), (२) तथा (३) को जोड़ने पर,

२(यर+रल+यल)=६२

अर्थात्, यर+रल+यल=३१ .....(४)

(४) से (१) घटाने पर, रल=६ .....(५)

(४) से (२) घटाने पर, यल=१० .....(६)

(४) से (३) घटाने पर, यर=१५ .....(७)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(५), (६) तथा (७) को गुणा करने पर,

$$य^२ र^२ ल^२ = ६ \times १० \times १५$$

$$यरल = \pm \sqrt{६ \times १० \times १५} = \pm ३० \quad \cdots\cdots(८)$$

(८) को (५) से भाग करने पर, य = ± ५
(८) को (६) से भाग करने पर, र = ± ३
(८) को (७) से भाग करने पर, ल = ± २ } उत्तर

प्रश्नावली ६८

हल करो :—

१. य + र = १२
र + ल = १५
ल + य = १३

२. य + र = १८
र + क = [illegible]
ल + य = २२

३. २य + र = ११
२र + ल = १७
२ल + य = १७

४. ३य + २र = २२
६र + ४ल = ३२
४ल + ५य = − ६

५. य − र = ३
र + ल = − ४
ल + य = ९

६. र + ल − य = ६
ल + य − र = ४
य + र − ल = २

७. $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = ३$

$\frac{१}{ल} + \frac{१}{र} = ५$

$\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = ४$

८. $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{५}{६}$

$\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = \frac{७}{१२}$

$\frac{१}{ल} + \frac{१}{य} = \frac{३}{४}$

९. $\frac{२}{य} + \frac{३}{र} = १८$

$\frac{३}{र} + \frac{५}{ल} = ३७$

$\frac{५}{ल} + \frac{२}{य} = ३१$

१०. $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} + \frac{२}{ल} = ०$

$\frac{३}{य} + \frac{४}{र} + \frac{९}{ल} = ०$

$\frac{५}{य} + \frac{२}{र} \frac{७}{ल} = ६$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

११. $\frac{४}{य}-\frac{२}{र}-\frac{१}{ल}=०$

$\frac{६}{य}-\frac{१}{र}-\frac{४}{ल}=०$

$\frac{१}{य}+\frac{१}{र}+\frac{१}{ल}$

१२. य+५र+१३ल=०

$\frac{३}{य}+\frac{२}{य}+\frac{४}{ल}=४\frac{५}{६}$

य+र+ल=०

१३. य+र=३यर

र+ल=५रल

य+ल=४यल

१४. रल+यल+यर=६यरल

२रल−३यल+४यर=८यरल

३रल−४यल+५यर=१०यरल

१५. $\frac{य+र}{यर}=\frac{१}{६}, \frac{र+ल}{रल}=\frac{१}{१२}, \frac{य+ल}{यल}=\frac{१}{२}$

१६. $\frac{य+र}{यर}=९, \frac{य+ल}{यल}=६, \frac{र+ल}{रल}=७$

१७. $\frac{यर}{य+र}=१ \frac{लय}{ल+य}=२, \frac{रल}{र+ल}=३,$

१८. $\frac{र+ल+३रल}{रल}=१४$

$\frac{ल+य+२यल}{यल}=१२$

$\frac{य+र+६यर}{यर}=१५$

१९. यर=१

रल=१६

यल=४

२०. यर=$क^२$, रल=$ख^२$, यल=$ग^२$

२१. यर+यल=७

यर+रल=१६

यल+रल=१५

२२. य(र+ल)=१४

र(य+ल)=१८

ल(य+र)=२०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२३. य(य+र+ल)=१०५
र(य+र+ल)=१४७
ल(य+र+ल) = १८९१

२४. (र+१) (र+२)=४
(र+२)(ल+३)=४
(ल+३) (य+१)=४

२५. (यर)(ल+य)=१२
(ल+य)(र+ल)=१५
(य+र)(र+ल)=२०

२६. र+ल=य
यल=४र
यर=१६ल

२७. $\frac{य-१}{२}=\frac{र-२}{३}=\frac{ल-३}{४}$
य+र+ल=१५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १३

युगपत् समीकरण सम्बन्धी प्रश्न

विषय प्रवेश—हम सरल समीकरण की सहायता से कुछ वार्तिक (इबारती) प्रश्न हल कर चुके हैं। अब हम युगपत् समीकरण की सहायता से ऐसे वार्तिक (इबारती) प्रश्नों को हल करेंगे जिनमें दो या तीन अज्ञात राशियाँ हों। ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिये निम्न रीति अपनाई जाती है :—

(१) प्रश्न को ध्यान से पढ़ो और देखो कि कितनी अज्ञात राशियाँ मालूम करनी है।

(२) उन अज्ञात राशियों को य, र, ल इत्यादि मान लो।

(३) जिस प्रकार एक अज्ञात राशि को मालूम करने के लिए हम ज्ञात तथा अज्ञात राशियों के दिये हुए सम्बन्धों द्वारा एक समीकरण बनाते हैं उसी प्रकार प्रश्न में जितनी अज्ञात राशियाँ ज्ञात करनी हैं उतनी ही स्वतन्त्र समीकरणें बनाओ।

(४) इस प्रकार प्राप्त युगपत् समीकरण को हल करके अज्ञात राशियाँ ज्ञात कर लो।

टिप्पणी—कुछ वार्तिक प्रश्न ऐसे हैं जिनमें दो अज्ञात राशियाँ मालूम करनी होती हैं परन्तु उनको हम एक अज्ञात राशि मान कर भी हल कर सकते हैं। यदि हम उनको दो अज्ञात राशि मान कर ही हल करें तो समीकरणें बनाने में सुविधा होती है।

संख्या तथा भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. दो संख्याओं का योगफल १०८ और उनका अन्तर ८ है। उन संख्याओं को बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया कि बड़ी संख्या य और छोटी संख्या र है।

∴ दोनों संख्याओं का योगफल य+र तथा उनका अन्तर य—र हैं

∴ य+र=१०८ ·····(१)

और य—र=८ ·····(२)

(१) और (२) को जोड़ने पर,

२य=११६ ; ∴ $\frac{११६}{२}$=५८

(१) में य=५८ रखने पर, ५८+र=१०८

अर्थात, र=१०८—५८=५०

∴ बड़ी संख्या=५८ और छोटी संख्या=५० उत्तर

उदाहरण २. रमेश और सुरेश में से प्रत्येक के पास कुछ रुपये हैं। यदि रमेश अपने रुपयों में से ३० रुपये सुरेश को दे देता है तो सुरेश के पास रमेश के रुपयों के दुगुने हो जाते हैं। यदि सुरेश अपने रुपयों में से १० रुपये रमेश को दे देता है तो रमेश के पास सुरेश से तिगुने रुपये हो जाते हैं। बताओ प्रत्येक के पास कितने कितने रुपये हैं।

माना लिया कि रमेश के पास य रुपये और सुरेश के पास र रुपये हैं। ३० रुपये देने के पश्चात रमेश के पास (य—३०) रु० और सुरेश के पास (र+३०) रु० हो जाते हैं।

∴ र+३०=२(य—३०) ·····(१)

१० रुपये देने के पश्चात् सुरेश के पास (र—१०) रु० और रमेश के पास (य—१०) रु० हो जाते हैं।

य+१०=३(र—१०) ·····(२)

(१) से, र+३०=२य—६०

अर्थात् —२य+र=—९० ·····(३)

अर्थात्, य—३र=—४० ·····(४)

(३) को ३ से गुणा करने पर,

३र—६य=—२७० ·····(५)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(४) और (५) को जोड़ने पर, $-य = -३१०$

$$\therefore \quad य = \frac{-३१०}{-५} = ६२$$

$र - २ \times ६२ = -९०$, (३) में $य = ६२$ रखने पर

अर्थात्, $र = -९० + १२४$,

अथार्, $र = ३४$

$\therefore$ रमेश से पास $= ६२$ रु० और सुरेश के पास $= ३४$ रु० ।

उत्तर

उदाहरण ३. दो अंकों की एक संख्या अंकों के योगफल की चार गुनी है। यदि संख्या में १८ जोड़ दिये जावें तो उनके अंक पलट जाते हैं। संख्या ज्ञात करो।

मान लिया कि इकाई का अंक य और दहाई का अंक र है।

संख्या $= १०र + य$

अश्वानुसार, $\therefore \quad १०र + य = ४(य + र)$

अर्थात् $\quad १०र + य = ४य + ४र$

अर्थात्, $\quad -३य + ६र = ०$;

या, $\quad -य + २र = ०$ ……(१)

अंकों के पलटने से बनी हुई संख्या $= १०य + र$

अश्वानुसार, $१०र + य + १८ = १०य + र$

अर्थात्, $\quad -९य + ९र = -१८$; या, $-य + र = -२$ ……(२)

(१) से (२) घटाने पर, $र - २$

(१) में $र = २$ रखकर, $य = ४$

अतः अभीष्ट संख्या $= २४$

उत्तर

उदाहरण ४. एक संख्या तीन अंकों से बनी है जिनमें से दहाई का अंक शून्य है तथा अंकों का योगफल ११ है। यदि संख्या के अंक पलट दिये जावें तो नई संख्या मूल संख्या से २९७ अधिक हो जाती है।

मान लिया कि इकाई का अंक य और सैकड़े का अंक र है।

$\therefore$ दहाई का अंक शून्य है

$\therefore$ अंकों का योगफल $= य + र$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore \quad य + र = ११$ .....(१)

संख्या $= १००र + ० + र = १००र + य$

पलटी हुई संख्या $= १००य + ० + द = १००य + र$

$\therefore \quad १००य + र = १००र + य + २९७$

अर्थात्, $\quad ९९य - ९९र = २९७$

अर्थात्. $\quad य - र = ३$ .....(२)

(१) और (२) को जोड़ने पर,

$२य = १४ ; \quad \therefore \quad य = \frac{१४}{२} = ७$

(१) में $य = ७$ रख कर, $७ + र = ११$

$\therefore \quad र = ११ - ७ = ४$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= ४०७$ उत्तर

उदाहरण ५. यदि किसी भिन्न के अंश में १ जोड़ दिया जाता है तो भिन्न $\frac{३}{७}$ के बराबर हो जाती है और यदि हर में से १ घटा दिया जाता है तो भिन्न $\frac{२}{५}$ के बराबर हो जाती है। उस भिन्न को बताओ।

मान लिया कि भिन्न का अंश य और हर र है :

$\therefore \quad भिन्न = \frac{य}{र}$

जब अंश में १ जोड़ दिया जाता है, तो भिन्न $= \frac{य + १}{र}$

$\therefore \quad \frac{य + १}{र} = \frac{३}{७}$ .....(१)

जब हर में १ जोड़ दिया जाता है तो भिन्न $= \frac{य}{र - १}$

$\therefore \quad \frac{य}{र - १} = \frac{२}{५}$ .....(२)

(१) से, $७(य + १) = ३र$

अर्थात्, $७य + ७ = ३र ; \quad \therefore \quad ७य - ३र = -७$ .....(३)

(२) से, $५य = २(र - १)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, ५य = २र — २, ∴ ५य — २र = — २ ·····(४)

(३) को २ तथा (४) को ३ से गुणा करने पर.

१४य — ६र = — १४ ·····(५)

१५य — ६र = — ६ ·····(६)

(५) से (६) घटा कर, — य = — ८ ; ∴ य = ८

(४) में य = ८ रख कर, ४० — २र = — २

अर्थात्, — २र = — ४२ ; ∴ द = २१

∴ अभीष्ट भिन्न = $\frac{८}{२१}$ उत्तर

प्रश्नावली ६९

१. दो संख्याओं का योगफल ९५ है। बड़ी संख्या छोटी संख्या के पाँच गुने से अधिक है। बड़ी संख्या बताओ।

२. दो संख्याओं का अन्तर १६ है। बड़ी संख्या का दुगुना छोटी के चार गुने से ६ कम है। संख्याएँ बताओ।

३. तीन संख्याओं में से पहली तथा तीसरी का योगफल ४५, दूसरी तथा तीसरी का योगफल ५७ और पहली का दुगुना दूसरी के तिगुने के साथ मिलकर १०१ होता है। संख्याएँ बताओ।

४. दो संख्याओं में से प्रत्येक में १ जोड़ देने से उनका अनुपात ३ : ४ होता हैं और प्रत्येक में से २ घटाने पर उनका अनुपात ५ : ७ होता है। संख्याएँ बताओ।

५. दो वृक्षों में से प्रत्येक पर कुछ चिड़ियाँ बैठी हैं। यदि पहले वृक्ष पर से एक चिड़िया उड़ कर दूसरे वृक्ष पर डैठ जाय तो दोनों वृक्षों पर बैठी हुई चिड़ियों की संख्या बराबर हो जाती है। यदि दूसरे वृक्ष से ४ चिड़ियाँ उड़कर पहले वृक्ष पर बैठ जायें तो दोनों वृक्षों पर बैठी हुई चिड़ियों की संख्या में अब १२ : ७ का अनुपात हो जाता है। प्रत्येक वृक्ष पर आरम्भ में बैठी हुई चिड़ियों की सख्या ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

६. रमेश और सुरेश में से प्रत्येक के पास कुछ सेव हैं। रमेश ने सुरेश से कहा, "यदि तुम मुझे ३० सेव दे दो तो मेरे पास तुमसे दुगुने सेव हो जावेंगे।" सुरेश ने उत्तर दिया, "यदि तुम मुझे १०० सेव दे दो तो मेरे पास तुमसे तिगुने सेव हो जावेंगे। प्रत्येक के पास कितने-कितने सेव थे ?

७. ६३ के ऐसे तीन भाग करो कि पहले और दूसरे के योगफल को २ से गुणा करने पर, दूसरे और तीसरे के योगफल में से ३ घटाने पर और पहले तथा दूसरे के योगफल में २ जोड़ने पर फल प्रत्येक दशा में समान आता है।

८. तीन संख्याएँ ऐसी हैं जिनमें से पहली तथा दूसरी का गुणनफल ४०, दूसरी तथा तीसरी का गुणनफल ९६ और पहली तथा तीसरी का गुणनफल ६० हैं। संख्याएँ बताओ।

९. दो अंकों की एक संख्या का मान उसके अंकों के योगफल का चौगुना है। यदि संख्या में १८ जोड़ दिये जाते हैं तो उसके अंक पलट जाते हैं। संख्या बताओ।

१०. दो अंकों (Digits) का एक संख्या के अंकों का योगफल ९ है। यदि अंक पलट दिये जाते हैं तो नई संख्या मूल संख्या से २७ अधिक हो जाती है। संख्या बताओ।

११. दो अंकों की एक संख्या है। यदि इसे अंकों के योग से भाग देते हैं तो भागफल ४ आता है। यदि संख्या के अंक पलट जायँ और उसमें १२ जोड़कर अंकों के योग से भाग दें तो भागफल ८ आता है। संख्या बताओ।

१२. १० और १०० के बीच की एक संख्या अपने अंकों के योग के चार गुने से ९ अधिक है। यदि अंकों के स्थान बदल दिये जायँ तो नई संख्या मूल संख्या से १८ अधिक है। संख्या बताओ।

१३. तीन अंकों से बनी एक संख्या के बायीं ओर वाले अंकों में से प्रत्येक अंक बाद में आने वाले अंक से १ कम है। उस संख्या

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

से २७ घटाने पर शेषफल उस संख्या के अंकों के योग का २३ गुना हो जाता है। उस संख्या को बताओ।

१४. तीन अंकों की एक संख्या में अंकों का योगफल १२ है। दहाई का अंक दोनों अंकों के योग का आधा है। यदि अंक पलट दिये जाते हैं तो नई संख्या मूल संख्या से १९८ कम हो जाती है। संख्या बताओ।

१५. एक संख्या तीन अंकों की बनी है जिनका योगफल १५ है। मध्य का अंक शेष दो अंकों के योग से १ अधिक है। यदि अंकों के स्थान बदल दिये जाते हैं तो नई संख्या ९९ कम हो जाती है संख्या बताओ।

आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. ५ वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र की आयु से तिगुनी थी और ५ वर्ष में पिता की आयु पुत्र की आयु से दुगुनी रह जावेगी। उनकी वर्तमान आयु बताओ।

मान लिया कि पिता की वर्तमान आयु य वर्ष और पुत्र की आयु र वर्ष है।

५ वर्ष पहले पिता की आयु=य—५ वर्ष
५ वर्ष पहले पुत्र की आयु=र—५ वर्ष
∴ य—५=३ (न—५) ·····(१)
५ वर्ष में पिता की आयु=य+५ वर्ष
५ वर्ष में पुत्र की आयु=र+५ वर्ष
∴ य+५=२ (र—५) ·····(२)

(१) से, य—५=३ह—१५
अर्थात्, य—३र=—१५+५
अर्थात्, य—३र=—१० ·····(३)
(२) से. ग+५=२र+१०
अर्थात्, य—२र=१०—५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, य—२र=५ .....(४)

(३) में से (४) घटाने पर,

—र=—५ ; ∴ र=१५

(४) में र=१५ रखने पर,

य—२×१५=५

अर्थात्, य—३०=५ ; ∴ य=५+३०=३५

∴ पिता की आयु=३५ वर्ष तथा पुत्र की आयु=१५ वर्ष उत्तर

प्रश्नावली ७०

१. दो वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र की आयु से चौगुनी थी। चार वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र से केवल तिगुनी रह जायगी। उनकी आयु बताओ।

२. ५ वर्ष पूर्व राजेन्द्र की आयु रमेश की आयु से सात गुनी थी। १५ वर्ष पश्चात् राजेन्द्र की आयु रमेश की आयु से तिगुनी रह जावेगी। दोनों की वर्तमान आयु बताओ।

३. सुरेश की आयु महेश की आयु से महेश की आयु का $\frac{२}{३}$ अधिक है। १० वर्ष पूर्व सुरेश की आयु महेश की आयु से डयोढ़ी थी। दोनों की वर्तमान आयु बताओ।

४. ६ वर्ष पूर्व सुरेन्द्र की आयु वही थी जो इस समय राजेन्द्र की आयु है। इस समय दोनों की आयु का योगफल ३८ वर्ष है। दोनों को वर्तमान आयु बताओ।

५. पुत्र ने पिता से पूछा, 'आपकी आयु क्या है ?' पिता ने उत्तर दिया, "१२ वर्ष में तुम्हारी आयु वही होगी जो मेरी आयु १२ वर्ष पूर्व थी तथा तथा १२ वर्ष में मेरी आयु तुम्हारी ४ वर्ष पूर्व की आयु की तिगुनी होगी। दोनों की आयु बताओ।

६. एक पुरुष और उसकी स्त्री की आयु का योगफल उनके पुत्र की आयु का छः गुना है। ५ वर्ष में वह केवल पाँच गुनी रह जावेगी यदि पुरुष की आयु स्त्री की आयु १० वर्ष अधिक हो, तो तीनों की वर्तमान आय बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

धन सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. राजेन्द्र ने २ घोड़े और ३ बैल १६०० रुपये में मोल लिये। यदि वह घोड़ों को १०% लाभ पर और बैलों को १५% लाभ पर बेचे तो इस प्रकार कुल विक्रय मूल्य १७९० रु० होता है। एक घोड़े और एक बैल का क्रय-मूल्य पृथक्-पृथक् बताओ।

मान लिया कि १ घोड़े का क्रय मूल्य य रु० और १ बैल का क्रय मूल्य र रु० है।

∵ २ घोड़े तथा ३ बैलों का क्रय-मूल्य १६०० रु० है

∴ २य + ३र = १६०० ·····(१)

१०% लाभ पर २ घोड़ों का विक्रय-मूल्य $= \frac{२य \times ११०}{१००}$ रु०

१५% लाभ पर ३ बैलों का विक्रय-मूल्य $= \frac{३र + ११२}{१००}$ रु०

∵ कुल विक्रय-मूल्य = १७९० रु०

∴ $\frac{२य \times ११०}{१००} + \frac{३र \times ११५}{१००} = १७९०$

अर्थात्, $\frac{११य}{५} + \frac{६९र}{२०} = १७९०$

अर्थात्, ४४य + ६९र = ३५८०० ·····(२)

(१) को २२ से गुणा करने पर

४४य + ६६र = ३५२०० ·····(३)

(२) में से (३) घटाने पर,

३र = ६०० ; ∴ $र = \frac{६००}{३} = २००$

(१) में र = २०० रखने पर, २य + ३ × २०० = १६००

अर्थात्, २य = १६०० − ६०० = १०००

∴ $य = \frac{१०००}{२} = ५००$

∴ घोड़े का क्रय-मूल्य = ५०० रु० और बैल का क्रय-मूल्य = २०० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. कुछ रुपये कुछ मनुष्यों में बराबर-बराबर बाँटे गये हैं। यदि २ मनुष्य कम होते तो प्रत्येक को एक-एक रुपया अधिक मिलता और यदि ३ मनुष्य अधिक होते तो प्रत्येक को एक-एक रुपया कम मिलता। रुपयों तथा मनुष्यों की संख्या बताओ।

मान लिया कि मनुष्यों की संख्या य थी और प्रत्येक मनुष्य को र रुपये मिले।

∴ रुपयों की संख्या = यर

यदि (य − २) मनुष्य होते तो प्रत्येक को (र + १) रु० मिलता

∴ (य − २) (र + १) = यर ·····(१)

यदि (य + ३) मनुष्य होते तो प्रत्येक को (र − १) रु० मिलते

∴ (य + ३) (र − १) = यर ·····(२)

(१) से, यर + य − २र − २ = यर

अर्थात्, य − २र = २ ·····(३)

(२) से, यर + ३र − य − ३ = यर

अर्थात्, −य + ३र = ३ ·····(४)

(३) और (४) को जोड़ने पर, र = ५

(३) में र = ५ रख कर, य − २ × ५ = २

अर्थात्, य = २ + १० = १२

∴ यर = ५ × १२ = ६०

∴ मनष्यों की संख्या = १२, रुपयों की संख्या = ६० उत्तर

प्रश्नावली ७१

१. ९ कुर्सियों और ५ मेजों का मूल्य २३५ रु० है तथा ५ कुर्सियों और ४ मेजों का मूल्य १५५ रु० है। प्रत्येक का पृथक्-पृथक् मूल्य बताओ।

२. ५ बैलों तथा ४ गायों का मूल्य ३५०० रुपये तथा ३ बैलों और ७ गायों का मूल्य ३२५० रु० है। प्रत्येक बैल तथा गाय का मूल्य बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. एक घोड़ा और गाड़ी का मूल्य १३६० रु० है। घोड़े का मूल्य गाड़ी के मूल्य का $\frac{५}{१२}$ है। प्रत्येक का मूल्य पृथक्-पृथक् बताओ।

४. एक दरी और एक कालीन का मूल्य ८०० रुपये है। यदि दरी का मूल्य १०% बढ़ जावे और कालीन का मूल्य १०% घट जावे तो दोनों का मूल्य ८२० रुपये हो जाता है। दोनों का मूल्य पृथक्-पृथक् बताओ।

५. एक मनुष्य ने १०० रुपये ब्याज पर दिये। जिनमें से कुछ तो ३% वार्षिक दर से और शेष ४% वार्षिक दर से। यदि २ वर्षों के अन्त में उसे कुल ६६ रु० ब्याज मिले तो बताओ प्रत्येक ब्याज दर पर कितना धन दिया गया।

६. सुरेश ने दो मेजें और ५ कुर्सियाँ ११५ रुपये में मोल लीं। यदि वह मेजों को ५% लाभ पर और कुर्सियों को ८% लाभ पर बेचे तो उसे कुल १० रुपये लाभ होता है। एक मेज और एक कुर्सी का क्रय-मूल्य अलग-अलग बताओ।

७. एक कक्षा में सब विद्यार्थियों को बराबर लड्डू बाँटे गये। यदि प्रत्येक विद्यार्थी को पाँच-पाँच लड्डू बाँटे जाते तो १५ लड्डू बच रहते और यदि प्रत्येक विद्यार्थी को छः-छः लड्डू बाँटे जाते तो १५ लड्डू कम पड़ते। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या तथा कुल लड्डुओं की संख्या बताओ।

८. एक कॉलेज में कुछ मेजें मोल ली गईं। यदि उनका मूल्य ५ रु० प्रति मेज कम हो जाता तो उस धन में ४ मेजें और आ जातीं और यदि उनका मूल्य ४ रु० प्रति मेज अधिक होता तो २ मेजें कम आतीं। बताओ कॉलेज में कितने रुपये में कितनी मेजें आईं।

९. २८०० रुपयों को क, ख और ग में इस प्रकार बाँटो कि क को ख तथा ग के योग का $\frac{३}{८}$ मिले और ख को क तथा ग के योग से २०० रु० अधिक मिलें।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. कोई धन सुरेश, नरेश तथा महेश में इस प्रकार बाँटा गया कि सुरेश को कुल धन का आधा मिले, सुरेश और नरेश को मिलाकर कुल १०५ रु० और सुरेश तथा महेश को मिलाकर कुल १२० रु० मिले। बताओ प्रत्येक को कितना-कितना मिला।

११. १००० रु० को ऐसे दो धनों में विभाजित करो कि यदि पहले को ७ वर्ष के लिये ३½ प्रतिशत की दर से और दूसरे को ३½ प्रतिशत की दर से ५ वर्ष के लिये सरल ब्याज पर रखा जावे तो पहले धन का ब्याज दूसरे के ब्याज से दूना होगा।

क्षेत्रफल और काम सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. यदि एक कमरे की लम्बाई १ मीटर कम कर दी जाय और उसकी चौड़ाई २ मीटर बढ़ा दी जाय तो उसका क्षेत्रफल ८ वर्ग मीटर बढ़ जाता है। यदि वह कमरा २ मीटर अधिक लम्बा और ३ मीटर अधिक चौड़ा होता तो उसका क्षेत्रफल ५६ वर्ग मीटर बढ़ जाता। कमरे की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

मान लिया कि कमरे की लम्बाई य मीटर और चौड़ाई र मीटर है।

∴ कमरे का क्षेत्रफल = यर वर्ग मीटर

पहली शर्त के अनुसार,

$$(य-१)\ (र+२) = यर+८$$

अर्थात्, $यर+२य-र-२ = यर+८$

अर्थात्, $२य-र = १०$ ·····(१)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$$(य+२)\ (र+३) = यर+५६$$

अर्थात्, $यर+३य+२र+६ = यर+५६$

अर्थात्, $३य+२र = ५०$ ·····(२)

(१) को २ से गुणा करने पर, $४य-२र = २०$ ·····(३)

(२) और (३) को जोड़ने पर, $७य = ७०$, ∴ $य = १०$

(१) में $य = १०$ रखने पर, $२०-र = १०$

अर्थात्, $-र = -१०$; ∴ $र-१०$

∴ कमरे की लम्बाई = १० मीटर और चौड़ाई = १० मीटर। उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. २ मनुष्य और ३ लड़के मिलकर एक काम को ८ दिन में कर सकते हैं। ३ मनुष्य और २ लड़के मिलकर एक काम को ७ दिन में कर सकते हैं। १ मनुष्य और १ लड़का उस काम को पृथक्-पृथक् कितने दिन में कर सकेंगे ?

मान लिया कि १ मनुष्य उस काम को य दिन में और १ लड़का उस काम को र दिन में कर सकता है।

$\therefore$ १ मनुष्य का १ दिन का काम $= \frac{१}{य}$

और १ लड़के का १ दिन का काम $= \frac{१}{र}$

$\because$ २ मनुष्य और ३ लड़के काम को ८ दिन में समाप्त करते हैं

$\therefore$ २ मनुष्य और ३ लड़कों का १ दिन का काम $= \frac{१}{८}$

$\therefore \quad \frac{२}{य} + \frac{३}{र} = \frac{१}{८}$ .....(१)

इसी प्रकार, $\frac{३}{र} + \frac{२}{य} = \frac{१}{७}$ .....(२)

(१) को २ से तथा (२) को ३ से गुणा करने पर,

$\frac{४}{य} + \frac{६}{र} = \frac{२}{८}$ .....(३)

$\frac{९}{य} + \frac{६}{र} = \frac{३}{७}$ .....(४)

(३) से (४) घटाने पर,

$-\frac{५}{य} = -\frac{५}{२८}$; $\therefore$ ५य=२८×५ ;

$\therefore \quad य = \frac{२८ \times ५}{५} = २८$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) मैं य = २८ रखने पर,

$$\frac{२}{२८}+\frac{३}{र}=\frac{१}{८}\text{ ; या, }\frac{३}{र}=\frac{१}{८}-\frac{२}{२८}=\frac{३}{५६}$$

$$\therefore\ ३र=५६\times ३\text{ ; }\therefore\ र=\frac{५६\times ३}{३}=५६$$

∴ उस काम को एक मनुष्य २८ दिन में और एक लड़का ५६ दिन में कर सकेगा।

प्रश्नावली ७२

१. यदि एक कमरे की लम्बाई २ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई १ मीटर कम कर दी जाय तो कमरे के क्षेत्रफल में कोई अन्तर नहीं पड़ता। यदि कमरे की लम्बाई २ मीटर कम कर दी जाय और चौड़ाई १ मीटर बढ़ा दी जाय तो क्षेत्रफल ४ वर्ग मीटर कम हो जाता है। कमरे की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

२. एक आयताकार मैदान की परिमाप ७२ मीटर है। यदि मैदान की लम्बाई २ मीटर बढ़ा दी जाय और चौड़ाई २ मीटर कम कर दी जाय तो उसका क्षेत्रफल १२ वर्ग मीटर कम हो जाता है। मैदान की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

३. एक आयत का विकर्ण ५० मीटर लम्बा है तथा उसकी परिमाप १२४ मीटर है। आयत की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

४. एक आयताकार कमरे का क्षेत्रफल ४८ वर्ग मीटर है। यदि कमरे की लम्बाई व चौड़ाई पृथक्-पृथक् २ मीटर बढ़ा दी जाती है तो कमरे का क्षेत्रफल ८० वर्ग मीटर हो जाता है। कमरे की लम्बाइ व चौड़ाई बताओ।

५. ४ मनुष्य और ३ लड़के एक काम को ८ दिन में कर सकते हैं तथा १० मनुष्य और ९ लड़के उसी काम को ३ दिन में कर सकते हैं। एक मनुष्य और एक लड़का उसी काम को पृथक्-पृथक् कितने दिन में कर सकेंगे ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

६. यदि २ आदमी और ६ लड़के मिलकर ५ दिन में १८० रु० कमाते हैं और ८ आदमी तथा १२ लड़के मिलकर ४ दिन में ३८४ रु० कमाते हैं। एक आदमी और एक लड़के का १ दिन का अलग-अलग वेतन बताओ।

७. सुरेन्द्र और महेन्द्र एक बड़ी दरी को १२ दिन में, महेन्द्र और नरेन्द्र १५ दिन में और नरेन्द्र तथा सुरेन्द्र २० दिन में बुन सकते हैं। बताओ वे तीनों उस दरी को पृथक्-पृथक् कितने दिनों में बुन सकेंगे।

८. नरेन्द्र और महेन्द्र मिलकर एक काम को १० दिन में कर सकते हैं। दोनों ने ४ दिन काम किया और फिर महेन्द्र चला गया। शेष काम को नरेन्द्र ने ९ दिन में पूरा किया। वे दोनों पृथक्-पृथक् उस काम को कितने-कितने दिनों में पूरा कर सकेंगे?

चाल सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. एक नाव किसी नदी में ३० किलोमीटर बहाव के विपरीत तथा ४४ किलोमीटर बहाव के साथ १० घण्टे में जाती है। यह नाव ४० किलोमीटर बहाव के विरुद्ध तथा ५५ किलोमीटर बहाव के साथ १३ घण्टे में जाती है। नदी तथा नाव की चाल बताओ।

मान लिया कि नाव की चाल य किलोमीटर प्रति घण्टा और नदी की चाल र किलोमीटर प्रति घण्टा है।

∴ बहाव के साथ नाव की चाल = (य + र) किलोमीटर प्रति घण्टा

और बहाव के विपरीत नाव की चाल = (य − र) किलोमीटर प्रति घण्टा

बहाव के विपरीत ३० किलोमीटर जाने में समय $= \frac{३०}{य - र}$ घण्टे

बहाव की ओर ४४ किलोमीटर जाने में समय $= \frac{४४}{य + र}$ घण्टे

$$\therefore \quad \frac{३०}{य - र} + \frac{४४}{य + र} = १० \qquad \cdots\cdots(१)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसी प्रकार, $\frac{४०}{य-र}+\frac{५५}{य+र}=१३$ .....(२)

(१) को (४) से और (२) को ३ से गुणा करने पर,

$$\frac{१२०}{य-र}+\frac{१७६}{य+र}=४०$$ .....(३)

$$\frac{१२०}{य-र}+\frac{१६५}{य+र}=३९$$ .....(४)

(३) में से (४) घटाने पर,

$$\frac{११}{य+र}=१,\ \therefore\ य+र=११$$ .....(५)

(१) में य+र=११ रख कर, $\frac{३०}{य-र}+\frac{४४}{११}=१०$

अर्थात्, $\frac{३०}{य-र}+४=१०$

अर्थात्, $\frac{३०}{य-र}=६$; $\therefore\ य-र=\frac{३०}{६}=५$ .....(६)

(५) और (६) को जोड़ने पर, २य=१६, ∴ य=८

(५) से (६) घटाने पर, २र=६ ; ∴ र=३

∴ नाव की चाल=८ किलोमीटर प्रति घण्टा और नदी की चाल=३ किलोमीटर प्रति घण्टा। उत्तर

उदाहरण २. एक घण्टा चलने के उपरान्त एक रेलगाड़ी के साथ एक दुर्घटना हो जाती है जिससे उसे एक घण्टा रुकना पड़ता है। दुर्घटना के कारण उसकी चाल पहले की $\frac{३}{४}$ हो जाती है और वह नियत स्थान पर ३ घण्टे देर से पहुँचती है। यदि दुर्घटना ५० किलोमीटर और आगे जाने पर होती तो रेलगाड़ी १ घण्टा २० मिनट पहले पहुँच जाती। गाड़ी की प्रारम्भिक चाल तथा यात्रा की लम्बाई ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया कि रेलगाड़ी की प्रारम्भिक चाल य किलोमीटर प्रति घण्टा और यात्रा की लम्बाई र किलोमीटर है।

∴ यदि दुर्घटना न हुई होती तो गाड़ी को कुल समय लगता $= \frac{र}{र}$ घण्टे।

१ घण्टा चलने के पश्चात् दुर्घटना हुई
१ घण्टे में गाड़ी चली=य किलोमीटर,
शेष दूरी=(र—य) किलोमीटर

दुर्घटना के पश्चात् गाड़ी की चाल $= \frac{३य}{५}$ किलोमीटर प्रति घण्टा

∴ शेष दूरी चलने में लगा समय $= \frac{र-य}{\frac{३य}{५}} = \frac{५(र-य)}{३य}$ घण्टे

∵ दुर्घटना के समय गाड़ी को १ घण्टा रुकना पड़ा

∴ कुल समय लगा $= १ + १ + \frac{५(र-य)}{३य}$ घण्टे

∴ गाड़ी ६ घण्टे देर में पहुँची

$$\therefore \quad १ + १ + \frac{५(र-य)}{३य} = \frac{र}{य} + ३$$

अर्थात् $\frac{५(र-य)}{३य} = \frac{र}{य} + १$

अर्थात्, ५र—५य=३र+३य ; या, ५र—५य—३र—३य=०

अर्थात्, २र—८य=०; या, र—४य=० ·····(१)

यदि दुर्घटना ५० किलोमीटर और आगे जाने पर होती तो दुर्घटना से पहले समय लगा $= \left(१ + \frac{५०}{य} \right)$ घण्टे

दुर्घटना होने पर १ घण्टा रुकना पड़ा
दुर्घटना के पश्चात् शेष दूरी=(र—य—५०) किलोमीटर

∵ दुर्घटना के पश्चात् गाड़ी की चाल $= \frac{३य}{५}$ किलोमीटर प्रति घण्टा

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ शेष दूरी चलने में समय लगा $= \dfrac{\dfrac{र-य-५०}{ह्य}}{५}$

$= \dfrac{५(र-य-५०)}{३य}$ घण्टे

इस प्रकार कुल समय लगा $= १ + \dfrac{५०}{य} + १ + \dfrac{५(र-य-५०)}{३य}$ घण्टे

अब गाड़ी को देर होती है = ३ घण्टे — १ घण्टा २० मिनट $= \dfrac{५}{३}$ घण्टे

$$\therefore \quad १ + \frac{५०}{य} + १ + \frac{५(र-य-५०)}{३य} = \frac{र}{य} + \frac{५}{३}$$

अर्थात्, $\dfrac{५०}{य} + \dfrac{५(र-य-५०)}{३य} = \dfrac{र}{य} - \dfrac{१}{३}$

अर्थात्, $१५० + ५र - ५य - २५० = ३र - य$

अर्थात्, $५र - ५य - ३र + य = १००$

अर्थात्, $२र - ४य = १००$; या, $र - २य = ५०$ ·····(२)

(२) से (१) घटाने पर, $२य = ५०$; $\therefore$ $य = २५$

(२) में $य = २५$ रखने पर, $र - ५० = ५०$; $\therefore$ $र = १००$

$\therefore$ गाड़ी की प्रारम्भिक चाल = २५ किलोमीटर प्रति घण्टा और यात्रा की लम्बाई = १०० किलोमीटर

प्रश्नावली ७३

१. एक मल्लाह बहाव की ओर ७८ किलोमीटर ६ घण्टे में और इतनी ही दूर बहाव के विरुद्ध १३ घण्टे में जाता है। नाव और नदी की चाल अलग-अलग बताओ।

२. एक नाव नदी के बहाब के विपरीत १२ किलोमीटर और बहाव के साथ १४ किलोमीटर ६ घण्टे में जाती है तथा १८ किलोमीटर बहाव के विरुद्ध और २८ किलोमीटर बहाव के साथ १० घण्टे में जाती है। नाव और नदी की चाल अलग-अलग बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. एक मल्लाह नदी के साथ १६ किलोमीटर जाकर पुनः वापिस ६ घण्टे में आ जाता है और उसे ज्ञात होता है कि नदी के साथ चलने की अपेक्षा विपरीत जाने से दुगुना समय लगता है। नदी और नाव की चाल बताओ।

४. एक मल्लाह को नदी में ४२ किलोमीटर जाकर फिर वापिस आने में कुल २० घण्टे लगते हैं। यदि उसे नदी के साथ ७ किलोमीटर जाने में उतना ही समय लगता है जितना समय उसे नदी के विरुद्ध ३ किलोमीटर जाने में लगता है तो नदी की चाल बताओ।

५. आध घण्टा चलने के पश्चात् एक रेलगाड़ी के साथ दुर्घटना हो जाती है। इसके पश्चात् उसकी चाल पहले की तीन चौथाई रह जाती है। इस प्रकार रेलगाड़ी नियत स्थान पर नियत समय से १ घण्टे १० मिनट देर में पहुँचती है। यदि यह दुर्घटना ३० किलोमीटर और आगे होती तो वह २५ मिनट पहले पहुँचती। गाड़ी की चाल तथा यात्रा की दूरी बताओ।

६. एक रेलगाड़ी क से ख को जाते हुए क से ५० किलोमीटर की दूरी पर दुर्घटना का शिकार हो जाती है उसके बाद उसकी चाल पहले की $\frac{3}{4}$ रह जाती है तथा ख पर ३ घण्टे देर से पहुँचती है। यदि दुर्घटना ५० किलोमीटर और आगे होती तो रेलगाड़ी केवल २ घण्टे देर से पहुँचती। क और ख के बीच की दूरी तथा गाड़ी की प्रारम्भिक चाल बताओ।

७. एक रेलगाड़ी के ३० किलोमीटर चलने के पश्चात् एक दुर्घटना हो जाती है जिससे उसकी चाल पहली चाल की $\frac{4}{5}$ रह जाती है तथा नियत स्थान पर ४५ मिनट देर से पहुँचती है। यदि दुर्घटना १८ किलोमीटर और आगे जाने पर हुई होती तो गाड़ी ९ मिनट पहले पहुँच गई होती। गाड़ी की प्रारम्भिक चाल तथा यात्रा की दूरी बताओ।

८. एक रेलगाड़ी कोई दूरी किसी चाल से तय करती है। यदि चाल ६ किलोमीटर प्रति घण्टा अधिक होती तो दूरी तय करने में

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४ घण्टे लगते और यदि चाल ६ किलोमीटर प्रति घण्टा कम होती तो दूरी तय करने में ६ घण्टे अधिक लगते। रेलगाड़ी की चाल तथा दूरी बताओ।

९. दो मोटरकारें दो स्थानों क और ख से एक साथ एक दूसरे की ओर चलती हैं और १ घण्टे में मिल जाती हैं। यदि वे एक ही दिशाओं में चलना आरम्भ करें तो ९ घण्टे में एक दूसरे को पकड़ लेती हैं। यदि दोनों स्थानों के बीच ९० किलोमीटर की दूरी हो तो कारों की अलग-अलग चालें बताओ।

१०. दो रेलगाड़ियाँ एक साथ रवाना होती है। तेज चलने वाली रेलगाड़ी स्टेशन क से और दूसरी गाड़ी स्टेशन ख से चलती है। दोनों रवाना होने के आधे घण्टे बाद मिलती हैं और उसके २० मिनट पश्चात् तेज गाड़ी ख पर पहुँच जाती है, उस समय दूसरी गाड़ी क से १५ किलोमीटर दूर रहती है। क और ख के बीच की दूरी बताओ।

११. दो व्यक्ति क और ख दो स्थानों प और फ से एक ही समय में एक दूसरे की ओर चलते हैं और दो घण्टे पश्चात् प से २४ किलोमीटर की दूरी पर मिलते हैं। जब ख स्थान प पर पहुँच जाता है तब क को फ स्थान तक पहुँचने में २० सिलोमीटर शेष रह जाते हैं तो प और फ के बीच की दूरी ज्ञात करो।

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १४

द्विघात अथवा वर्ग समीकरण
(QUADRATIC EQUATIONS)

द्विघात (वर्ग) समीकरण—निम्नलिखित समीकरण पर विचार करो :—

(१) $य^२ = ९$

(२) $५य^२ = २०$

(३) $य^२ + ५य + ६ = ०$

(४) $२य^२ + ५य = ०$

ये समीकरणें ऐसी हैं जिनमें से प्रत्येक में अज्ञात राशि की सबसे बड़ी घात २ है। ऐसी समीकरणों को द्विघात (वर्ग) समीकरण (Quadratic) (Equations) कहते हैं।

अतः द्विघात (वर्ग) समीकरण वह समीकरण है जिसमें अज्ञात राशि की सबसे बड़ी घात दो हो।

शुद्ध द्विघात (Pure Quadratic) समीकरण तथा **मिश्र द्विघात** (Adfected Quadratic) समीकरण—

उपर्युक्त समीकरणों में से समीकरण (१) और (२) ऐसी हैं जिनमें अज्ञात राशि के ऐसे पद हैं जिनमें अज्ञात राशि की घात २ है और पहली घात के पद नहीं हैं। ऐसी समीकरण को **शुद्ध द्विघात** समीकरण कहते हैं।

उपर्युक्त समीकरणों में से समीकरण (३) और (४) ऐसी हैं जिनमें अज्ञात राशि के दो घात वाले पद और एक घात वाले पद दोनों सम्मिलित हैं। ऐसी समीकरण को **मिश्र द्विघात** समीकरण कहते हैं।

शुद्ध द्विघात समीकरण को हल करना
(Solution of Pure Quadratic Equations)

शुद्ध द्विघात समीकरण को हल करने के लिये सर्वप्रथम अज्ञात राशि के

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वर्ग का मान ज्ञात करना होता है। फिर उस मान का वर्ग मूल ज्ञात करके उस अज्ञात राशि का मान प्राप्त करते हैं।

उदाहरण १. $५य^२=४५$ को हल करो।

$$५य^२=४५$$

अर्थात्, $य^२=\frac{४५}{५}=९$; $\therefore$ $य=\pm\sqrt{९}=\pm ३$ उत्तर

टिप्पणी १. इस समीकरण से य के दो मान प्राप्त हुए हैं $+३$ और -३ इसका कारण इस प्रश्न से जाना जा सकता है कि ९ का वर्गमूल कितना है ? चूँकि ९ का वर्ग मूल $+३$ और -३ दोनों हो सकते हैं, इसलिये य के दो मान प्राप्त होते हैं।

अतः प्रत्येक द्विघात समीकरण में अज्ञात राशि के दो मान प्राप्त होंगे, जिनसे वह समीकरण सन्तुष्ट हो सकती है।

टिप्पणी २. चूँकि $य^२$ का वर्ग मूल भी $\pm य$ होगा, इसलिए पाठकगण कहेंगे कि उत्तर इस प्रकार लिखा जाना चाहिए कि $\pm य=\pm ३$ जिसका अर्थ है कि (१) $+य=३$, (२) $+य=-३$, (३) $-य=+३$ और (४) $-य=-३$। चूँकि (१) और (४) से $य=३$ और (२) तथा (३) से $य=-३$ प्राप्त होता है। इसलिये $य=\pm ३$ ही लिखना पर्याप्त होता है।

उदाहरण २. $\frac{य}{३}+\frac{३}{य}=\frac{य}{४}+\frac{४}{य}$ को हल करो।

$$\frac{य}{३}+\frac{३}{य}=\frac{य}{४}+\frac{४}{य}$$

दोनों पक्षों को १२य से गुणा करने पर,

$$४य^२+३६=३य^२+४८$$

अर्थात्, $४य^२-३य^२=४८-३६$

अर्थात्, $य^२=१२$; $\therefore$ $य=\pm\sqrt{१२}=\pm २\sqrt{३}$ उत्तर

उदाहरण ३. $\frac{य+३}{य-३}+\frac{य-३}{य+३}=३\frac{१}{३}$ को हल करो।

$$\frac{य+३}{य-३}+\frac{य-३}{य+३}=\frac{१०}{३}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $\frac{(य+३)^२+(य-३)^२}{(य-३)\ (य+३)}=\frac{१०}{३}$

अर्थात्, $\frac{य^२+६य+९+य^२-६य+९}{य^२-९}=\frac{१०}{३}$

अर्थात्, $\frac{२य^२+१८}{य^२-९}=\frac{१०}{३}$

अर्थात्, $६य^२+५४=१०य^२-९०$; या, $-४य^२=-१४४$

अर्थात्, $य^२=\frac{-१४४}{-४}=३६$

$\therefore\ य=\pm\sqrt{३६}=\pm६$ उत्तर

उदाहरण ४. हल करो :—

$$\frac{य^२-३}{य^२-४}-\frac{य^२-१}{य^२-२}=-\frac{य^२-४}{य^२-५}+\frac{य^२-६}{य^२-७}$$

प्रत्येक भिन्न के अंश को उसके हर से भाग देने पर,

$$१+\frac{१}{य^२-४}-\left\{१+\frac{१}{य^२-२}\right\}=$$

$$-\left\{१+\frac{१}{य^२-५}\right\}+१+\frac{१}{य^२-७}$$

अर्थात्, $\frac{१}{य^२-४}-\frac{१}{य^२-२}=-\frac{१}{य^२-५}+\frac{१}{य^२-७}$

$$\frac{य^२-२-य^२+४}{(य^२-४)(य^२-२)}=\frac{-य^२+७+य^२-५}{(य^२-५)\ (य^२-७)}$$

अर्थात्, $\frac{२}{(य^२-४)(य^२-२)}=\frac{१}{(य^२-५)(य^२-७)}$

अर्थात्, $\frac{१}{(य^२-४)\ (य^२-२)}=\frac{१}{(य^२-५)(य^२-७)}$

अर्थात्, $(य^२-५)(य^२-७)=(य^२-४)(य^२-२)$

अर्थात्, $य^४-१२य^२+३५=य^४-६य^२+८$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $य^४ - १२य^२ - य^४ + ६य^२ = ८ - ३५$

अर्थात्, $-६य^२ = -२७$

अर्थात्, $य^२ = \frac{-२७}{-६} = \frac{९}{२}$; $\therefore$ $य = \pm\sqrt{\frac{९}{२}} = \frac{३}{\pm १२}$ उत्तर

प्रश्नावली ७४

हल करो :—

१. $य^२ = २५$

२. $२य^२ = २४२$

३. $२य^२ - ५ = ४५$

४. $७य^२ + ५ = ३४८$

५. $३य^२ + ७ = ४य^२ - २$

६. $य^२ + २क^२ = ११क^२$

७. $(य - ३)^२ = २५$

८. $२(य + २)^२ = १८$

९. $२(य + ३)(य - ३) = ३२$

१०. $य(य + ७) = (२य - १)(य + ४)$

११. $(य + २)^२ + (य + ४)^२ = १०(य + १०) + य^२ + २य + २०$

१२. $(य + २)(य + ३) + (य + ४)(य + १) = य(य + १०) + १४$

१३. $\frac{य}{३} = \frac{१२}{य}$

१४. $\frac{२य}{५} = \frac{१०}{य}$

१५. $\frac{य}{२} + \frac{२}{य} = \frac{य}{८} + \frac{८}{य}$

१६. $\frac{य + ७}{य + ४} = \frac{२य - १}{य}$

१७. $\frac{१}{य - २} - \frac{१}{य + ८} = \frac{५}{३य}$

१८. $\frac{१}{१ + य} + \frac{१}{१ - य} = \frac{६}{१ + य^२}$

१९. $\frac{य + २}{य - २} + \frac{य - २}{य + २} = २\frac{१६}{२१}$

२०. $\frac{य + ३}{य - ३} + \frac{य - ३}{य + ३} = \frac{२९}{१०}$

२१. $८य + \frac{७}{य} = \frac{६५}{७} \cdot य$

२२. $\frac{य^२ + १}{य^२ - ४} - \frac{य^२ - ५}{य^२ - ८} = \frac{य^२ - २}{य^२ - ५} - \frac{य^२ - ६}{य^२ - ९}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मिश्र द्विघात समीकरण को हल करना

मिश्र द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $कय^2+खय+ग=०$ है। इसको हल करने की विधियाँ निम्न हैं :—

(i) गुणनखण्ड ज्ञात करके

(ii) पूर्ण वर्ग बनाकर

(iii) सूत्र का प्रयोग करके

गुणनखण्ड ज्ञात करके

निम्न पर विचार करो :—

(i) $७\times०=०$ और (ii) $क\times०=०$

(iii) $०\times य^2=०$ और (iv) $(य-१)\times०=०$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि यदि किसी राशि अथवा व्यंजक को शून्य से गुणा करते हैं तो प्रत्येक दशा में गुणनफल शून्य के बराबर होगा।

हम यह भी परिणाम ज्ञात करते हैं कि यदि दो या दो से अधिक राशियों का गुणनफल शून्य है तो उसके गुणनखण्डों में से कम से कम एक खण्ड अवश्य शून्य के बराबर है।

इसी सिद्धान्त पर यह रीति आधारित है। जैसे $य\times र=०$, तो या तो $य=०$ या $र=०$ और या दोनों ही शून्य हैं। इसी प्रकार यदि $(य-१)(य+२)=०$, तो या तो $य-१=०$ या $य+२=०$ जिन्हें हल करके $य=१$ और $य=-२$ प्राप्त होते हैं। चूँकि य के दोनों मान समीकरण $(य-१)(य+२)=०$ को सन्तुष्ट करते हैं, इसलिये इस समीकरण के मूल १ और -२ हैं।

मूल (Roots)—इस विधि में समीकरण के सब पदों को बराबर के चिह्न के एक ओर तथा शून्य को दूसरी ओर लिखते हैं। फिर इस व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं और प्रत्येक खण्ड को पृथक्-पृथक् शून्य के बराबर लिखते हैं। अतएव अज्ञात राशि के जो मान इस प्रकार प्राप्त होते हैं वे समीकरण के मूल (Roots) कहलाते हैं।

टिप्पणी : यही रीति सबसे सरल है। साधारणतया इसी रीति से ऐसे प्रश्न हल करते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $य^२ - य - ६ = ०$ को हल करो।

$य^२ - य - ६ = ०$

अर्थात्, $य^२ - ३य + २य - ६ = ०$

अर्थात्, $य(य - ३) + २(य - ३) = ०$

अर्थात्, $(य - ३)(य + २) = ०$

यदि $य - ३ = ०$, तो $य = ३$

यदि $य + २ = ०$, तो $य = -२$

$\therefore$ $य = ३, -२$ उत्तर

उदाहरण २. $\frac{य}{य+१} + \frac{य+१}{य} = \frac{१३}{६}$ को हल करो।

$\frac{य}{य+१} + \frac{य+१}{य} = \frac{१३}{६}$

दोनों पक्षों को $६य(य+१)$ से गुणा करने पर,

$६य^२ + ६(य+१)^२ = १३य(य+१)$

अर्थात्, $६य^२ + ६(य^२ + २य + १) = १३य^२ + १३य$

अर्थात्, $६य^२ + ६य^२ + १२य + ६ = १३य^२ + १३य$

अर्थात्, $१२य^२ - १३य^२ + १२य - १३य = -६$

अर्थात्, $-य^२ - य = -६$

अर्थात्, $य^२ + य - ६ = ०$; $\therefore$ $(य+३)(य-२) = ०$

यदि $य + ३ = ०$, तो $य = -३$

यदि $य - २ = ०$, तो $य = २$

$\therefore$ $य = -३, २$ उत्तर

उदाहरण ३. $(क - ख)\ य^२ + (क + ख)\ य + २ख = ०$ को हल करो।

$(क - ख)\ य^२ + (क + ख)\ य + २ख = ०$

अर्थात्, $(क - ख)\ य^२ + (क - ख)\ य + २ख\ य + २ख = ०$

अर्थात्, $(क - ख)\ य\ (य + १) + २ख\ (य + १) = ०$

अर्थात्, $(य + १)\ \{(क - ख)\ य + २ख\} = ०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ यदि $य+१=०$, तो $य=-१$

यदि $(क-ख)\,य+२ख=०$, तो $य=\frac{-२ख}{क-ख}$

$\therefore$ $य=-१,\ \frac{-२ख}{क-ख}$ उत्तर

प्रश्नावली ७५

हल करो :—

१. $य\,(य-२)=०$

२. $(य\cdot २)\,(य-३)=०$

३. $य^२-७य=०$

४. $२(य+१)^२=०$

५. $(२य-१)\,(३य+२)=०$

६. $य^२+य-२=०$

७. $य^२+५य+६=०$

८. $४य^२-८य+३=०$

९. $६य^२+५य-१=०$

१०. $य(य-३)=४$

११. $१४=य^२+५य$

१२. $(२य+३)\,(य-१)=३$

१३. $१२य^२+२३कय-२४क^२=०$

१४. $य+\frac{१}{य}=२$

१५. $१०य-\frac{१}{य}=३$

१६. $य^२-\left(प+\frac{१}{य}\right)य+१=०$

१७. $(३य-१)\,(य-४)+(य-२)\,(२य-३)=४य(य-३)-५$

१८. $य^२+२कख=(२क+ख)य$

१९. $\frac{य}{प}+\frac{प}{य}=\frac{फ}{प}+\frac{प}{फ}$

२०. $\frac{य}{य+१}+\frac{य+१}{य}=२\frac{१}{१२}$

२१. $\frac{२य-१}{य-४}=\frac{य+४}{२य-७}$

२२. $\frac{ख}{य-क}+\frac{क}{य-ख}=२$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पूर्ण वर्ग बनाकर

कुछ मिश्र द्विघात समीकरणें ऐसी होती हैं जिनके मूल गुणनखंड की रीति द्वारा नहीं ज्ञात कर सकते, उनको हल करने के लिये निम्न रीति का प्रयोग करते हैं :—

सर्वप्रथम समीकरण को $य^२+खय=ग$ के रूप में लिख लेते हैं। फिर बायें पक्ष को पूर्ण वर्ग के रूप में लिख कर समीकरण को हल कर लेते हैं जैसा निम्न उदाहरणों में दिखाया गया है।

उदाहरण १. $य^२+२य-१=०$ को हल करो।

$$य^२+२य-१=०$$

अर्थात्, $$य^२+२य=१$$

बायें पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने के लिये दोनों पक्षों में १ जोड़ कर

$$य^२+२य+१=१+१$$

अर्थात्, $$(य+१)^२=२$$

अर्थात्, $$य+१=\pm\sqrt{२}\text{ ; अर्थात्, }य=\pm\sqrt{२}-१$$

$$\therefore\quad य=\sqrt{२}-१,\ -\sqrt{२}-१$$ उत्तर

उदाहरण २. $३य^२-य-१=०$ को हल करो।

$$३य^२-य-१=०$$

अर्थात्, $$३य^२-य=१$$

अर्थात्, $$य^२-\frac{१}{३}य=\frac{१}{३}$$

बायें पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने के लिये दोनों पक्षों में $\left(\frac{१}{६}\right)^२$ जोड़ने पर,

$$य^२-\tfrac{१}{३}य+\left(\tfrac{१}{६}\right)^२=\tfrac{१}{३}+\left(\tfrac{१}{६}\right)^२$$

$$\left(य-\frac{१}{६}\right)^२=\frac{१}{३}+\frac{१}{३६}=\frac{१२+१}{३६}=\frac{१३}{३६}$$

$$\therefore\quad य-\frac{१}{६}=\pm\sqrt{\frac{१३}{३६}}=\frac{\pm\sqrt{१३}}{६}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $य = \frac{\pm\sqrt{१३}}{६} + \frac{१}{६} = \frac{\pm\sqrt{१३}+१}{६}$

$\therefore \quad य = \frac{\sqrt{१३}+१}{६}, \quad \frac{-\sqrt{१३}+१}{६}$ उत्तर

टिप्पणी : पूर्ण वर्ग बनाने की रीति से हम प्रत्येक प्रकार की मिश्र द्विघात समीकरण को हल कर सकते हैं। परन्तु व्यवहार में इसका प्रयोग तभी करते हैं जब गुणनखण्ड वाली रीति काम में नहीं ला सकते। इसलिये इस रीति का भी अभ्यास काफी कर लेना चाहिये।

प्रश्नावली ७६

हल करो :—

१. $य^२ - २य - ४ = ०$ २. $य^२ - ६य - १५ = ०$

३. $३य^२ + ५य + १ = ०$ ४. $२य^२ - य = ५$

५. $६य^२ - ५य - १५ = ०$ ६. $४य^२ + ८य - ३ = ०$

७. $४(य^२ + २३य - २४) = २९य^२ - ८य + १$

९. $य + \frac{१}{य} = ०$ ९. $\frac{२य}{य-४} + \frac{२य-५}{य-३} = ८\frac{१}{३}$

१०. $\frac{य}{१५} + \frac{४०}{३(१०-य)} = \frac{३(१०+य)}{९५}$

११. $य + २ - \frac{६}{य+२} = १$

सूत्र का प्रयोग करके

हम जानते हैं कि मिश्र द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $कय^२ + खय + ग = ०$ है। इसको निम्न प्रकार हल करते हैं :—

$$कय^२ + खय + ग = ०$$

अर्थात्, $कय^२ + खय = -ग$

अर्थात्, $य^२ + \frac{ख}{क} य = -\frac{ग}{क}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

बायें पक्ष को पूर्ण बनाने के लिये दोनों पक्षों में $\left(\frac{ख}{२क}\right)^२$ जोड़ कर,

$$य^२+\frac{ख}{क}य+\left(\frac{ख}{२क}\right)^२=-\frac{ग}{क}+\left(\frac{ख}{२क}\right)^२$$

अर्थात्, $$\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^२=-\frac{ग}{क}+\frac{ख^२}{४क^२}$$

अर्थात्, $$\left(य+\frac{ख}{२क}\right)^२=\frac{-४कग+ख^२}{४क^२}$$

अर्थात्, $$य+\frac{ख}{२क}=\pm\sqrt{\frac{-४कग+ख^२}{४क^२}}$$

अर्थात्, $$य=-\frac{ख}{२क}+\frac{\pm\sqrt{-४कग+ख^२}}{२क}$$

$$\therefore\quad य=\frac{-ख\pm\sqrt{-४कग+ख^२}}{२क}$$

उपर्युक्त फल एक सूत्र है जिसके द्वारा किसी भी मिश्र द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कर सकते हैं। पहले हम समीकरण को सरल करके कय^२+खय +ग=० के रूप में ले आते हैं और फिर उपर्युक्त सूत्र का उपयोग करके समीकरण के मूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : ८य^२+३=१०य को हल करो।

८य^२+३=१०य

अर्थात्, ८य^२−१०य+३=०

इस समीकरण की तुलना कय^२+खय+ग=० से करने पर, क=८, ख=−१० और ग=३

$$\therefore\quad य=\frac{-ख\pm\sqrt{-४कग+ख^२}}{२क}$$

$$\therefore\quad य=\frac{-(-१०)\pm\sqrt{-४\times८\times३+(-१०)^२}}{२\times८}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{१० \pm \sqrt{-९६ + १००}}{१६}$$

$$= \frac{१० \pm \sqrt{४}}{१६} = \frac{१० \pm २}{१६} = \frac{१० + २}{१६}, \frac{१० - २}{१६}$$

$$= \frac{१२}{१६}, \frac{८}{१६} = \frac{३}{४}, \frac{१}{२}$$ उत्तर

प्रश्नावली ७७

हल करो :—

१. $य^२ + ५य - १८ = ०$ २. $५य^२ + ६य = २०$

३. $२७ = ५य\ (९य - १)$

४. $८\ (य - १)\ (१ + य) + २\ (य + ३) = १$

५. $\frac{२य + ३}{य} + \frac{४य}{२य + ३} = ५\frac{१}{३}$

६. $\frac{१}{य - २} + \frac{२}{य - १} = \frac{६}{य}$

७. $\frac{१}{य - १} + \frac{१}{य - २} = \frac{२}{य}$

८. $\frac{१}{य}\left(१६ - \frac{९}{य}\right) = ७\frac{१}{९}$

९. $\frac{य + ३}{य - ३} + \frac{य + २}{य - २} = २$

१०. $\frac{४\ (य - २)}{य + २} + \frac{५\ (य + ३)}{य - ३} = ९$

११. $\frac{य - १}{२} - \frac{१}{य} = य - \frac{२}{य}$

१२. $\frac{य - १}{य - २} + \frac{य - ३}{य - ४} = ३\frac{१}{३}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. $\frac{य+४}{य-४}+\frac{य-४}{य+४}=\frac{१०}{३}$

१४. $\frac{य+३}{य+२}+\frac{य-३}{य-२}=\frac{२य-३}{य-१}$

१५. $\frac{य-२}{य+२}+\frac{य+२}{य-२}=\frac{५(य+३)}{य-३}$

सरल युगपत् द्विघात समीकरण

(Easy Simultaneous Quadratic Equations)

उदाहरण १. हल करो :—

$य+र=७$ .....(१)

$यर=१२$ .....(२)

(१) से, $य=७-र$ .....(३)

(२) में य का मान रख कर, $(७-र)\,र=१२$

अर्थात्, $७र-र^२=१२$

अर्थात्, $र^२-७र+१२=०$

अर्थात्, $(र-४)(र-३)=०$; $\therefore$ $र=४, ३$

यदि $र=४$, तो $य=७-४=३$

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} य=३, ४ \\ र=४, ३ \end{array}\right\}$ उत्तर

उदाहरण २. हल करो :—

$य^२+र^२=१३$ .....(१)

$यर=६$ .....(२)

(२) से, $य=\frac{६}{र}$ .....(३)

(१) में $य=\frac{६}{र}$ रखने पर, $\left(\frac{६}{र}\right)^२+र^२=१३$

अर्थात्, $\frac{३६}{र^२}+र^२=१३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, $३६+र^{४}=१३र^{२}$

अर्थात्, $र^{४}-१३र^{२}+३६=०$; $\therefore (य^{२}-९)(य^{२}-४)=०$

$\therefore$ $र^{२}=९$ और $र^{२}=४$

यदि $र^{२}+९$, $\therefore$ $र=\pm ३$

यदि $र=४$, $\therefore$ $र=\pm २$

(३) में र के मान रखने पर,

यदि $र=+३$, तो $य=\frac{६}{३}=२$

यदि $र=-३$, तो $य=\frac{६}{-३}=-२$

यदि $र=+२$, तो $य=\frac{६}{२}=३$

यदि $र=-२$, तो $य=\frac{६}{-२}=-३$

$\left.\begin{array}{l} य=\pm २, \pm ३ \\ र=\pm ३, \pm २ \end{array}\right\}$ उत्तर

प्रश्नावली ७८

हल करो :—

१. $य+र=९$
$यर=२०$

२. $य-र=२$
$यर=१५$

३. $य+र=३$
$यर=-२८$

४. $३य+४र=१८$
$यर=६$

५. $य^{२}+र^{२}=१३$
$य+र=५$

६. $य^{२}-र^{२}=१६$
$य+र=८$

७. $य^{२}-र^{२}=३३$
$य-र=३$

८. $य^{२}+र^{२}=६५$
$य-र=३$

९. $य^{२}+र^{२}=२५$
$यर=१२$

१०. $य^{२}-र^{२}=७$
$यर=१२$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

११. य—२र=०
य²—३र²=४

१२. ६र—५य=०
यर=३०

१३. $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=०$
यर—=१

१४. $\frac{१}{य}-\frac{१}{र}=२$
$\frac{१}{य^२}-\frac{१}{र^२}=१६$

१५. $\frac{३}{य}+\frac{२}{र}=२$
यर=६

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १५

द्विघात समीकरण सम्बन्धी प्रश्न
(PROBLEMS ON QUADRATIC EQUATIONS)

हम सरल समीकरण व युगपत् समीकरण द्वारा वार्तिक (इबारती) प्रश्नों को हल कर चुके हैं। अब हम ऐसे वार्तिक प्रश्नों को हल करेंगे जिनको यदि बीजीय भाषा में लिखें तो द्विघात समीकरण बनती है।

हम पढ़ चुके हैं कि द्विघात समीकरण के दो मूल प्राप्त होते हैं, इसलिये उन प्रश्नों के भी दो ही उत्तर प्राप्त होंगे जिनको हम द्विघात समीकरण द्वारा हल करते हैं। परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दोनों ही उत्तर सार्थक हों। कभी-कभी अज्ञात राशि के दोनों मान उस प्रश्न को सन्तुष्ट करते हैं और कभी केवल एक ही मान सार्थक होता है।

अतः जब दोनों मान प्राप्त हो जावें तो हमें ध्यानपूर्वक देखना चाहिये कि उनमें से दोनों मान सार्थक हैं या केवल एक मान। यदि केवल एक मान सार्थक है तो दूसरे मान को निरर्थक बता कर छोड़ देना चाहिये। यह बात निम्न उदाहरणों में और स्पष्ट हो जावेगी।

संख्या सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. एक संख्या ऐसी बताओ कि उसका और उसके वर्ग का योगफल ९० हो।

मान लिया कि वह संख्या य है।

$$\therefore \quad य + य^2 = ९०$$

अर्थात्, $य^2 + य - ९० = ०$

अर्थात्, $(य + १०)(य - ९) = ०$

$$\therefore \quad य = -१०, ९$$

अभीष्ट संख्याएँ ९ और −१० हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. एक संख्या २ अंकों से मिल कर बनी है। अंकों का गुणनफल १२ है। यदि अंक पलट दिये जायँ तो नई संख्या पहली से ९ अधिक हो जाती है। उस संख्या को बताओ।

मान लिया कि इकाई का अंक य है। ∴ दहाई का अंक $= \frac{१२}{य}$

$$\therefore \quad संख्या = ५०\left(\frac{१२}{य}\right) + य = \frac{१२०}{य} + य$$

अंकों के पलटने से बनी संख्या $= १०य + \frac{१२}{य}$

$$\therefore \quad १०य + \frac{१२}{य} = \frac{१२०}{य} + य + ९$$

$$\text{अर्थात्,} \quad १०य - य + \frac{१२}{य} - \frac{१२०}{य} - ९ = ०$$

$$\text{अर्थात्,} \quad ९य - \frac{१०८}{य} - ९ = ०$$

$$\text{अर्थात्,} \quad य - \frac{१२}{य} - १ = ०$$

$$\text{अर्थात्,} \quad य^२ - १२ - य = ०\ ; \ \therefore (य - ४)(य + ३) = ०$$

$$\therefore \quad य = ४, -३$$

∵ अंक ऋणात्मक नहीं हो सकता, ∴ इकाई का अंक $= ४$

$$\therefore \quad \text{दहाई का अंक} = \frac{१२}{४} = ३; \ \therefore \text{संख्या} = ३४$$

प्रश्नावली ७९

१. दो संख्याओं का योगफल ११ और उनके वर्गों का योगफल ६१ है। उन संख्याओं को बताओ।

२. किसी संख्या का आठ गुना उसी संख्या के वर्ग से २० कम है। संख्या बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. किस संख्या को उसी से गुणा करने पर गुणनफल १५७·०००९ होगा ?

४. ३० के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग का वर्ग दूसरे भाग के बराबर हो।

५. एक संख्या अपने व्युत्क्रम से $\frac{२४}{५}$ अधिक है। संख्या बताओ।

६. दो क्रमागत (consecutive) विषम संख्याओं का गुणनफल ३९९ है। संख्याएँ बताओ।

७. दो क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल ९६० है। संख्याएँ बताओ।

८. एक संख्या दो अंकों से मिलकर बनी है। अंकों का गुणनफल ६ है। यदि अंक पलट दिये जायें तो नई संख्या पहली संख्या से ४५ अधिक हो जाती है। उस संख्या को बताओ।

९. दो अंकों की किसी संख्या में इकाई का अंक दहाई का वर्ग है। यदि अंक बदल दिये जाते हैं तो नई संख्या पहली संख्या से ५४ अधिक है। संख्या बताओ।

१०. किसी संख्या के दोनों अंकों का योगफल १० है। यदि अंकों के वर्गों के योगफल में से २१ घटा दिये जावें तो संख्या के अंक पलट जाते हैं। संख्या बताओ।

भिन्न तथा आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. किसी भिन्न के अंश का दूना उसके हर से १ अधिक है। यदि अंश और हर दोनों में ५ जोड़ दिये जावें तो नई भिन्न मूल भिन्न से $\frac{७}{६०}$ अधिक हो जाती है। मूल भिन्न बताओ।

मान लिया कि भिन्न का अंश य और उसका हर र है

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ भिन्न $= \frac{य}{र}$

$\because$ अंश का दूना हर से १ अधिक है

$\therefore$ २य − र = १ .....(१)

दूसरी शर्त से, $\frac{य+५}{र+५} = \frac{य}{र} + \frac{७}{६०}$ .....(२)

(१) से, र = २य − १ ; (२) में र का मान रखने पर,

$$\frac{य+५}{२य-१+५} = \frac{य}{२य-१} + \frac{७}{६०}$$

अर्थात्, $\frac{य+५}{२य+४} - \frac{य}{२य+१} = \frac{७}{६०}$

अर्थात्, $\frac{२य^२+९य-५-२य^२-४य}{(२य+४)(२य-१)} = \frac{७}{६०}$

अर्थात्, $\frac{५य-५}{४य^२+६य-४} = \frac{७}{६०}$

अर्थात्, ३००य − ३०० = २८य² + ४२य − २८

अर्थात्, २८य² + ४२य − २८ − ३००य + ३०० = ०

अर्थात्, २८य² − २५८य + २७२ = ०

अर्थात्, १४य² − १२९य + १३६ = ०

अर्थात्, १४य² − ११२य − १७य + १३६ = ०

अर्थात्, १४य (य − ८) − १७ (य − ८) = ०

अर्थात्, (य − ८) (१४य − १७) = ०

$\therefore$ य = ८, $\frac{१७}{१४}$; $\therefore$ $\frac{१७}{१४}$ भिन्नात्मक है, $\therefore$ अंश = ८

यदि अंश = ८, तो हर = २ × ८ − १ = १५ ; $\therefore$ भिन्न $= \frac{८}{१५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. पिता और पुत्र की आयु का योगफल ५० वर्ष है। ६ वर्ष पूर्व उनकी आयु का गुणनफल १३६ था। उनकी आयु बताओ।

मान लिया कि पिता की आयु = य वर्ष

∴ पुत्र की आयु = (५० — य) वर्ष

६ वर्ष पूर्व पिता की आयु = (य — ६) वर्ष

६ वर्ष पूर्व पुत्र की आयु = (५० — य — ६) वर्ष = (४४ — य) वर्ष

∴ (य — ६) (४४ — य) = १३६

अर्थात्, $४४य - य^२ - २६४ + ६य = १३६$

अर्थात्, $५०य - य^२ - २६४ - १३६ = ०$

अर्थात्, $५०य - य^२ - ४०० = ०$

अर्थात्, $य^२ - ५०य + ४०० = ०$

∴ (य — १०) (य — ४०) = ०

∴ य = १०, ४० ; ∵ पिता की आयु १० वर्ष नहीं हो सकती

∴ पिता की आयु = ४० वर्ष और
पुत्र की आयु = ५० — ४० = १० वर्ष } उत्तर

प्रश्नावली ८०

१. किसी भिन्न के अंश का दुगुना हर से २ कम है। यदि अंश और हर दोनों में ३ जोड़ दिये जायें तो नई भिन्न मूल भिन्न से $\frac{९}{१२}$ अधिक हो जाती है। मूल भिन्न बताओ।

२. किसी भिन्न का अंश उसके हर से ९ कम है। यदि अंश और हर दोनों में से २ घटा दिया जाय तो नई भिन्न मूल से $\frac{६}{१८}$ कम हो जाती है। मूल भिन्न बताओ।

३. दो भिन्नों का गुणनफल $\frac{३}{५}$ और उनका योगफल $\frac{३१}{२०}$ है। भिन्नों को बताओ।

४. किसी भिन्न और उससे व्युत्क्रम का योगफल $२\frac{१}{६}$ है। वह भिन्न बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. पिता और पुत्र की आयु का योगफल १०० है। २० वर्ष पूर्व उनकी आयु का गुणनफल उनकी आयु के योगफल के ग्यारह गुना से १५ अधिक था। उनकी आयु बताओ।

६. पिता और पुत्र की आयु का अन्तर २८ वर्ष है। पिता की आयु का छः गुना और पुत्र की आयु का पाँच गुना मिलकर उनकी आयु के गुणनफल के बराबर होता है। उनकी आयु बताओ।

७. दो भाईयों की वर्तमान आयु का गुणनफल ४२ है। ८ वर्ष पश्चात् उनकी आयु में अनुपात २ : १ का हो जावेगा। उनकी वर्तमान आयु बताओ।

क्षेत्रफल तथा धन सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल ५४०० वर्ग मीटर है। उसके बाहर चारों ओर ५ मीटर चौड़ा एक मार्ग बना हुआ है जिसका क्षेत्रफल १६०० वर्ग मीटर है। मैदान की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

मान लिया कि मैदान की लम्बाई य मीटर और चौड़ाई र मीटर है।

∴ मैदान का क्षेत्रफल = यर वर्ग मीटर

∴ यर = ५४०० ……(१)

मार्ग सहित मैदान की लम्बाई = य + २ × ५ = (य + १०) मीटर

मार्ग सहित मैदान की चौड़ाई = र + २ × ५ = (र + १०) मीटर

मार्ग सहित मैदान का क्षेत्रफल = (य + १०) (र + १०) वर्ग मीटर

∴ (य + १०) (र + १०) − यर = १६००

अर्थात्, यर + १०य + १०र + १०० − यर = १६००

अर्थात्, १०य + १०र = १५०० ……(२)

अर्थात्, य + र = १५०

(१) में य का मान रखने पर,

(२) से, य = १५० − र

(१५० − र) र = ५४००

अर्थात्, १५०र − $र^2$ − ५४०० = ०

अर्थात्, $र^2$ − १५०र + ५४०० = ०

अर्थात्, (र − ९०) (र − ६०) = ०

∴ र = ९०, ६०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि $र = ९०$, तो $य = \frac{५४००}{९०} = ६०$

यदि $र = ६०$, तो $य = \frac{५४००}{६०} = ९०$

∵ साधारणतया लम्बाई चौड़ाई से अधिक होती है

∴ लम्बाई = ९० मीटर और चौड़ाई = ६० मीटर उत्तर

उदाहरण २. एक बैल को ९६ रुपये में बेचने से उतने ही प्रतिशत लाभ होता है जितना कि उसका क्रय-मूल्य था। बैल का क्रय मूल्य बताओ।

मानलिया कि बैल का क्रय मूल्य = य रु०

∴ लाभ = य%

∴ य रुपये पर लाभ = $\frac{य^२}{१००}$ रु०

∴ विक्रय मूल्य = $\left(य + \frac{य^२}{१००}\right)$ रु०

∴ $य + \frac{य^२}{१००} = ९६$

अर्थात्, $१००य + य^२ = ९६००$

अर्थात्, $य^२ + १००य - ९६०० = ०$

अर्थात्, $(य + १६०)(य - ६०) = ०$

∴ $य = -१६०, ६०$

∵ मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता

∴ बैल का क्रय-मूल्य = ६० रु० उत्तर

उदाहरण ३. एक मनुष्य ने कुछ बकरियाँ ६०० रुपये में मोल लीं। यदि प्रत्येक बकरी का मूल्य ५ रु० कम होता तो वह इसी धन में ६ बकरियाँ और मोल ले लेता। बताओ उसने कितनी बकरियाँ मोल ली थीं।

मान लिया कि बकरियों की संख्या = य

∴ १ बकरी का मूल्य = $\frac{६००}{य}$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मूल्य कम होने पर बकरियों की संख्या $= य + ६$

$\therefore$ १ बकरी का मूल्य $= \frac{६००}{य + ६}$

$\therefore \frac{६००}{य} - \frac{६००}{य + ६} = ५$

अर्थात्, $६०० (य + ६) - ६००य = ५य (य + ६)$

अर्थात्, $६००य + ३६०० - ६००य = ५य^२ + ३०य$

अर्थात्, $५य^२ + ३०य - ३६०० = ०$

अर्थात्, $य^२ + ६य - ७२० = ०$

अर्थात्, $(य + ३०) (य - २४) = ०$

$\therefore$ $य = -३०, २४$

$\therefore$ बकरियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती

$\therefore$ बकरियों की अभीष्ट संख्या $= २४$ उत्तर

प्रश्नावली ८१

१. किसी आयताकार बाग का क्षेत्रफल १६२० वर्ग मीटर है। इसकी लम्बाई चौड़ाई से ९ मीटर अधिक है। बाग की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

२. किसी आयत की परिमाप ६४ मीटर है और उसका क्षेत्रफल २४० वर्ग मीटर है। आयत की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

३. एक आयत का विकर्ण ५० मीटर लम्बा है। उसकी परिमाप १२४ मीटर है। आयत की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

४. एक आयताकार बाग का क्षेत्रफल ४८०० वर्ग मीटर है। उसके बाहर चारों ओर ५ मीटर चौड़ी सड़क बनवाने का खर्च ४ आने प्रति वर्ग मीटर की दर से ३७५ रु० होते हैं। बाग की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

५. एक आयताकर पिंड की लम्बाई उसकी चौड़ाई से ४ मीटर और ऊँचाई से २ मीटर अधिक है। यदि लम्बाई २ मीटर तथा

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

चौड़ाई ३ मीटर बढ़ा दी जाय और ऊँचाई २ मीटर कम कर दी जाय तो उसका आयतन ४०० घन मीटर बढ़ जाता है। पिंड की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई बताओ।

६. किसी कमरे की लम्बाई चौड़ाई के दुगुने से ५ मीटर कम है। यदि कमरे का क्षेत्रफल ७०० वर्ग मीटर हो तो कमरे की लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

७. अपनी गाय २५ रुपयों में बेच कर प्रेम को जितने प्रतिशत की हानि हुई वह उसके क्रय-मूल्य में रुपयों की संख्या के बराबर है। गाय का क्रय-मूल्य बताओ।

८. एक वस्तु को १४४ रु० में बेचने पर किसी मनुष्य को उतने प्रतिशत का लाभ हुआ जितना उसका क्रय-मूल्य था। वस्तु का क्रय-मूल्य बताओ।

९. एक किसान ने कुछ भेड़ें ९० रुपये में मोल लीं। यदि भेड़ का मूल्य १ रु० कम होता तो इसी धन में ३ भेड़ें और आ जातीं। बताओ किसान ने कितनी भेड़ें मोल ली थीं।

१०. आमों के मूल्य में १ रुपया प्रति दर्जन कम होने से १०० रुपयों में ५ दर्जन आम और आ जाते हैं। आमों का पहला मूल्य प्रति दर्जन बताओ।

११. कुछ मनुष्य एक होटल में साथ-साथ खाना खा रहे थे और इस प्रकार उनको १ मास में ३०० रुपये देने पड़ते थे। उनमें से २ मनुष्यों ने अपना भाग नहीं दिया। इस कारण शेष मनुष्यों को ७ रु० ५० पैसे प्रति मनुष्य अधिक देना पड़ा। कुल मनुष्यों की संख्या बताओ।

१२. एक मनुष्य ने १००० रु० में कुछ भेड़ें मोल लीं। उनमें से ५ भेड़ें मर गईं। शेष को उसने प्रत्येक भेड़ पर ५ रु० लाभ लेकर बेच दिया। इस प्रकार उसे ५% का लाभ हुआ। भेड़ों की संख्या बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

काम व चाल सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण १. किसी काम को सुरेश और महेश दोनों मिलकर ६ दिन में समाप्त कर लेते हैं। यदि उस काम को वे दोनों अलग-अलग करें तो उसको समाप्त करने में सुरेश की अपेक्षा महेश को ५ दिन कम लगेंगे। बताओ प्रत्येक उस काम को अलग-अलग कितने दिनों में कर सकता है।

मान लिया कि सुरेश उस काम को य दिन में समाप्त कर सकता है।

∴ महेश उस काम को (य—५) दिन में समाप्त कर सकेगा।

∴ सुरेश १ दिन में काम करेगा $= \frac{१}{य}$

और महेश १ दिन में काम करेगा $= \frac{१}{य-५}$

∴ दोनों मिलकर १ दिन में काम करेंगे $= \frac{१}{य} + \frac{१}{य-५}$

परन्तु दोनों मिलकर एक दिन में काम करते हैं $= \frac{१}{६}$

$$\therefore \quad \frac{१}{य} + \frac{१}{य-५} = \frac{१}{६}$$

अर्थात्, $\frac{य-५+य}{य(य-५)} = \frac{१}{६}$

अर्थात्, $६(२य-५) = य(य-५)$

अर्थात्, $१२य - ३० = य^२ - ५य$

अर्थात्, $य^२ - ५य - १२य + ३० = ०$

अर्थात्, $य^२ - १७य + ३० = ०$

अर्थात्, $(य-१५)(य-२) = ०$

$\therefore \quad य = १५, २$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि य=१५, तो य—५=१०

यदि य=२, तो य—५=—३

∵ दिन ऋणात्मक नहीं हो सकते

∴ सुरेश काम को १५ दिन में और महेश १० दिन में कर सकता है। उत्तर

उदाहरण ३. एक गाड़ी ६० किलोमीटर की यात्रा किसी चाल से तय करती है। यदि चाल १० किलोमीटर प्रति घण्टा अधिक होती, तो उसे यात्रा तय करने में ३० मिनट कम लगते। गाड़ी की चाल बताओ।

मान लिया कि गाड़ी की चाल=य किलोमीटर प्रति घण्टा

∴ ६० किलोमीटर चलने में समय लगा $= \frac{६०}{य}$ घण्टे

गाड़ी की बढ़ी हुई चाल=(य+१०) किलोमीटर प्रति घण्टा

∴ ६० किलोमीटर चलने में समय लगेगा $= \frac{६०}{य+१०}$ घण्टा

$$\therefore \frac{६०}{य} - \frac{६०}{य+१०} = \frac{१}{२}$$

अर्थात्, $\frac{६०य+६००-६०य}{य(य+१०)} = \frac{१}{२}$

अर्थात्, $\frac{६००}{य^२+१०य} = \frac{१}{२}$

अर्थात्, $य^२+१०य=१२००$

अर्थात्, $य^२+१०य-१२००=०$

अर्थात्, $(य+४०)(य-३०)=०$

∴ य=—४०, ३०

∵ चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती

∴ गाड़ी की चाल=३० किलोमीटर प्रति घण्टा उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ८२

१. किसी काम को समाप्त करने में क को ख की अपेक्षा १० दिन कम लगते हैं। दोनों मिलकर उस काम को १२ दिन में कर सकते हैं। बताओ अलग अलग प्रत्येक उस काम को कितने दिनों में कर सकते हैं।

२. किसी काम को समाप्त करने में क को ख की अपेक्षा २० दिन अधिक लगते हैं। दोनों मिलकर उस काम को २४ दिन में समाप्त करते हैं। बताओ उस काम को उनमें से प्रत्येक अलग-अलग कितने दिनों में कर सकेगा।

३. एक हौज दो नलों से ३ घण्टे ४४ मिनट में भरा जा सकता है। बड़ा नल छोटे नल की अपेक्षा उसे १ घण्टा कम में भर सकता है। बताओ प्रत्येक नल अलग-अलग उसे कितनी देर में भर सकता है।

४. चार पुरुषों और १० स्त्रियों ने १ काम को २ दिन समाप्त किया। यदि १ स्त्री पूरा काम करने में १ पुरुष से ६ दिन अधिक लगाये तो एक पुरुष उस काम को कितने दिन में कर सकता है।

५. एक काम को करने में कुछ आदमियों को उतने ही दिन लगे जितनी कि उनकी संख्या थी। यदि ५ आदमी और होते तो काम १६ दिन में पूरा हो जाता। बताओ वहाँ कितने आदमी थे।

६. एक नाव नदी के बहाव के साथ ६ किलोमीटर और उतनी ही दूर फिर वापिस १३५ मिनट में जा सकती है जब कि नदी की चाल २ किलोमीटर प्रति घण्टा है। शान्त जल में नाव की चाल बताओ।

७. एक नाव नदी में ९ किलोमीटर बहाव के विरुद्ध और १४ किलोमीटर बहाव के साथ ५ घण्टे में जाती है। यदि शान्त जल में नाव की चाल ५ किलोमीटर प्रति घण्टा हो तो नदी की चाल बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. एक मोटरकार ३०० किलोमीटर की यात्रा किसी विशेष चाल से करती है। यदि उसकी चाल १ किलोमीटर प्रति घण्टा कम होती तो उसे यात्रा करने में $\frac{1}{2}$ घण्टा अधिक लगता। बताओ मोटरकार किस चाल से यात्रा तय करती है।

९. दो स्टेशनों से जिनके बीच की दूरी ३३ किलोमीटर है दो मनुष्य एक दूसरे से मिलने को चलते हैं। पहले मनुष्य को दूसरे की अपेक्षा १ किलोमीटर चलने में ३ मिनट अधिक लगते हैं। वे दोनों मनुष्य $४\frac{1}{2}$ घण्टे में मिल जाते हैं। बताओ प्रत्येक को १ किलोमीटर चलने में कितना समय लगेगा।

१०. एक लड़का ४४० मीटर की दौड़ में देखता है कि यदि वह अपनी पहली चाल $\frac{4}{5}$ मीटर प्रति सेकिंड और बढ़ा दे तो नियुक्त स्थान पर ५ सेकिंड पहले पहुँच जायगा। उसकी पहली चाल मीटर प्रति सेकिंड में बताओ।

११. एक मनुष्य को ८४ किलोमीटर की यात्रा करने के बाद मालूम हुआ कि यदि वह अपनी चाल को ५ किलोमीटर प्रति घण्टा बढ़ा देता तो वह यात्रा ५ घण्टे पहले समाप्त हो जाती। उसकी चाल बताओ।

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

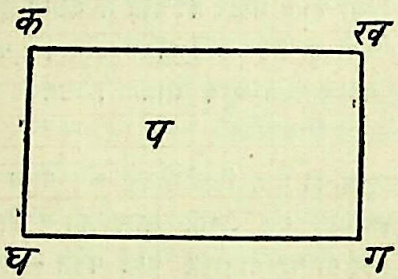
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १६

लेखाचित्र अथवा रैखिक ग्राफ
(LINEAR GRAPHS)

धरातल पर किसी बिन्दु का स्थान नियत करना

चित्र १६·१ में किसी कॉलेज के खेल का मैदान क ख ग घ है। हमको



चित्र १६·१

उसमें प स्थान पर एक खम्भा (Pole) गाड़ना है। हम उसे किस प्रकार नियत करेंगे ? यदि यह बतला दिया जावे कि वह स्थान क घ से ६ मीटर और घ ग से ५ मीटर की दूरी पर है तो प स्थान तुरन्त ज्ञात हो सकता है।

इससे स्पष्ट है कि धरातल पर कोई स्थान नियत करने के लिये हमको दो ऋजु रेखाओं का उपयोग करना पड़ता है जिनसे उस स्थान की दूरियाँ ज्ञात हों।

इसी प्रकार किसी कागज पर एक बिन्दु का स्थान नियत करने के लिए दो ऋजु रेखाओं का जो एक दूसरे के लम्बवत् होती हैं, सहारा लेते हैं। इन रेखाओं को **अक्ष** (Axes) कहते हैं और जिस बिन्दु पर वे रेखायें एक दूसरे को काटती हैं उसको **मूल-बिन्दु** (Origin) कहते हैं।

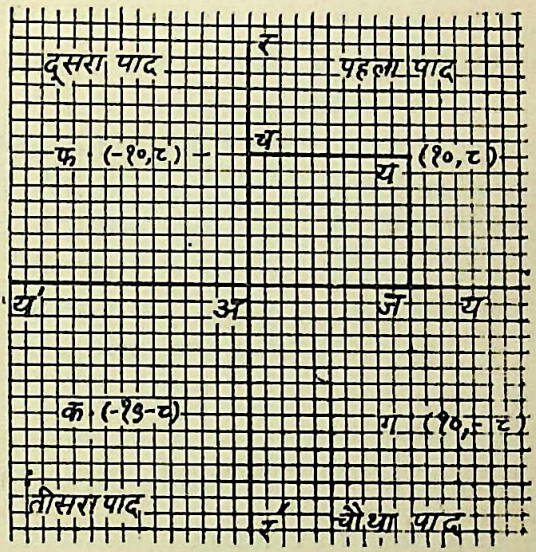
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

ग्राफ पेपर (Graph paper)—ऐसे प्रश्नों के लिए हम एक विशेष प्रकार के कागज का प्रयोग करते हैं जिसको ग्राफ पेपर (Graph Paper) कहते हैं।

दिये हुए बिन्दु के निर्देशांक (Coordinates) ज्ञात करना

चित्र १६·२ में य अ य′ और र अ र′ दो अक्ष हैं जो बिन्दु अ पर एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं।



चित्र १६·२

य अ य′ को य-अक्ष (x-axis) और र अ र′ को र-अक्ष (y-axis) कहते हैं। मूल बिन्दु (Origin) अ है। इन अक्षों ने इस पृष्ठ को चार भागों में विभाजित कर दिया है जिनको पाद (Quadrant) कहते हैं। प्रत्येक पाद (Quadrant) का नाम चित्र में प्रकट कर दिया है।

मान लिया कि बिन्दु 'प' का स्थान ज्ञात करना है। बिन्दु प से य-अक्ष पर प ज और र-अक्ष पर प च लम्ब डालो। बिन्दु प की दूरी र-अक्ष से

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१० इकाई और य-अक्ष से ८ इकाई है जबकि एक छोटा खाना एक इकाई प्रदर्शित करता है। स्पष्ट है कि प्रत्येक दूरी मूलबिन्दु से नापी जाती है।

अब बिन्दु फ पर विचार करो। यह भी र-अक्ष से १० इकाई और य-अक्ष य-अक्ष से ८ इकाई की दूरी पर है।

ऐसी दुविधाओं को सुलझाने के लिये धन (+) और ऋण (—) चिन्हों का प्रयोग करते हैं।

चिन्हों के नियम—य अक्ष पर जो दूरियाँ अ से य की ओर नापी जाती हैं उनको धन (+) से और जो दूरियाँ अ से य' की ओर नापी जाती हैं उनको ऋण (—) से प्रकट करते हैं। र-अक्ष पर अ से र की ओर नापी जाने वाली दूरियाँ धन (+) से और र' की ओर नापी जाने वाली दूरियाँ ऋण (—) से प्रकट होती हैं। जो दूरियाँ य-अक्ष पर नापी जाती है उनको **भुजा** (Abscissa) और जो दूरियाँ र-अक्ष पर नापी जाती हैं उनको **कोटि** (Ordinate) कहते हैं। संक्षेप में भुजा और कोटि को मिलाकर **निर्देशांक** (Coordinates) कहते हैं। भुजा को पहले और कोटि को बाद में लिखते हैं। इसलिए चित्र में बिन्दु प के निर्देशांक (१०, ८) तथा फ बिन्दु के निर्देशांक (—१०, ८) हैं।

इसी प्रकार बिन्दुओं 'क' और 'ख' के निर्देशांक क्रमशः (—१०, —८) और (१०, —८) हैं। मूल बिन्दु अ के निर्देशांक (०, ०) हैं।

दिये हुए निर्देशांकों (Coordinates) से बिन्दु का आलेखन

उदाहरण १. निम्न बिन्दु का आलेख (Plot) करना है :—

(१२, —९)

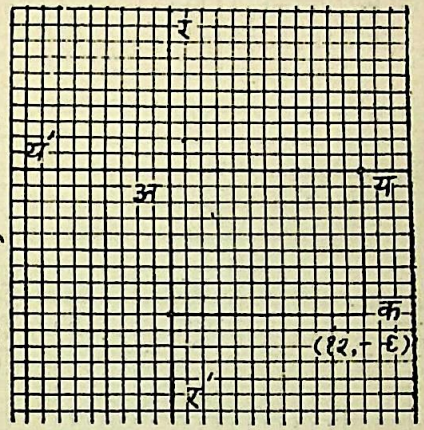
ग्राफ पेपर पर य-अक्ष और र-अक्ष खींचो और मूल बिन्दु का नाम 'अ' रखो। (चित्र १६·३)।

सबसे छोटे वर्ग की लम्बाई को इकाई मानलो। य-अक्ष पर अ से अ य की ओर १२ इकाइयों की दूरी पर एक बिन्दु लो। फिर र-अक्ष पर अ से र' की ओर ९ इकाइयों की दूरी पर दूसरा बिन्दु लो। पहले बिन्दु से र-अक्ष

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

के समान्तर और दूसरे विन्दु से य-अक्ष के समान्तर रेखायें खींचो जो एक दूसरे को विन्दु क पर काटती हैं। अभीष्ट विन्दु क है।



चित्र १६·३

उदाहरण २. विन्दुओं (—१६, २०) और (१२, —१६) को आलेख करो और उनको मिलाने वाली रेखा पर (१) उस विन्दु का कोटि बताओ जिसका भुज —१० हो और (२) उस विन्दु का भुज बताओ जिसका कोटि —७ हो।

ग्राफ पेपर पर य-अक्ष और र-अक्ष खींच लिये। मूल विन्दु का नाम अ रखो। विन्दुओं (—१६, २०) और (१२, —१६) को आलेख कर लिये। उनके नाम क्रमशः प और फ रखे। प फ को मिला दिया। (चित्र १६·४)।

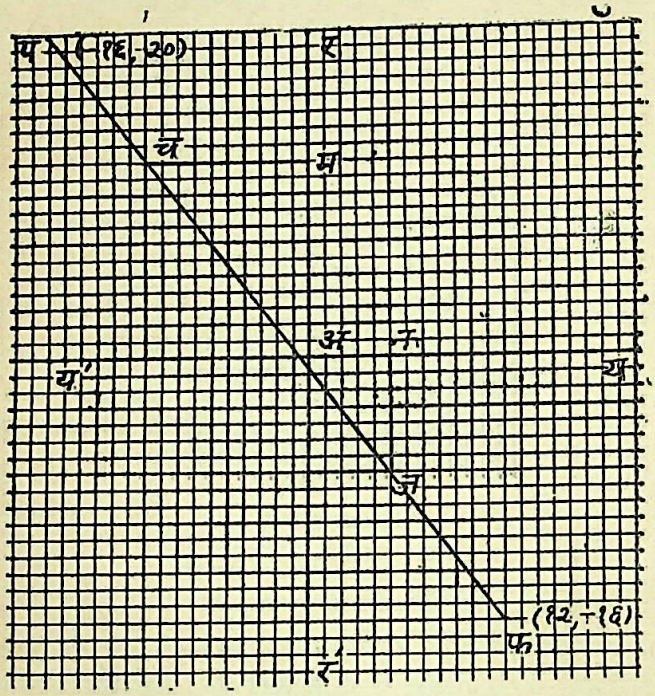
(१) मूल विन्दु अ से अय' पर १० इकाई ली और वहाँ से एक रेखा र-अक्ष के समान्तर खींची जो रेखा पफ को विन्दु च पर काटती है। फिर विन्दु च से र-अक्ष पर लम्ब डाला, जो उसे विन्दु म पर काटता है। अ से म तक की इकाइयाँ गिन लीं। इस प्रकार विन्दु च का कोटि १२ है।

अतः रेखा पफ पर —१० भुज वाले विन्दु का कोटि १२ है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain, Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(२) मूल बिन्दु अ से अर' पर ७ इकाई ली और वहाँ से एक रेखा य-अक्ष के समान्तर खींची जो रेखा प फ को बिन्दु ज पर काटती है। फिर बिन्दु



चित्र १६·४

ज से य-अक्ष पर लम्ब डाला जो उसे बिन्दु न पर काटता है। अ से न तक की इकाइयाँ गिन लीं। इस प्रकार बिन्दु ज का भुज ५ है।

अतः रेखा पफ पर —७ कोटि वाले बिन्दु का भुज ५ है।

प्रश्नावली ८३

१. निम्न को समझाओ :—

य-अक्ष, र-अक्ष, मूल बिन्दु (Origin) भुज (Abscissa), कोटि (Ordinate) तथा निर्देशांक (Coordinates)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. निम्नलिखित बिन्दुओं का आलेखन करो और बताओ कि वे किन-किन पादों (Quadrants) में स्थित हैं :—

(०, ८) (०, —१०), (६, ०), (—८, ०), (१०, ६), (—९, ५) (—८, —४), (४, —३) और (०, ०)

३. बिन्दुओं (०, ०) और (—१०, १०) का आलेखन करो और इन बिन्दुओं को मिलाने वाली ऋजु रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो।

४. बिन्दुओं (१०, ५) और (—११, २) का आलेखन करो। इन बिन्दुओं को मिलाओ। इस रेखा पर उस बिन्दु का (१) भुज बताओ जिसका कोटि ४ है और (२) कोटि बताओ जिसका भुज १७ है।

५. बिन्दुओं (६, —१) और (—१०, ७) का आलेखन करो। इन बिन्दुओं को मिलाने वाली ऋजु रेखा को बढ़ाओ। उस रेखा पर उस बिन्दु का (१) भुज बताओ जिसका कोटि १० है और (२) कोटि बताओ जिसका भुज १२ है।

६. बिन्दुओं (७, १०), (—५, —८) और (१३, १९) का आलेखन करो और दिखलाओ कि वे बिन्दु एक ऋजु रेखा पर स्थित हैं।

सरल समीकरण का लेखाचित्र
(Graph of Simple Equation)

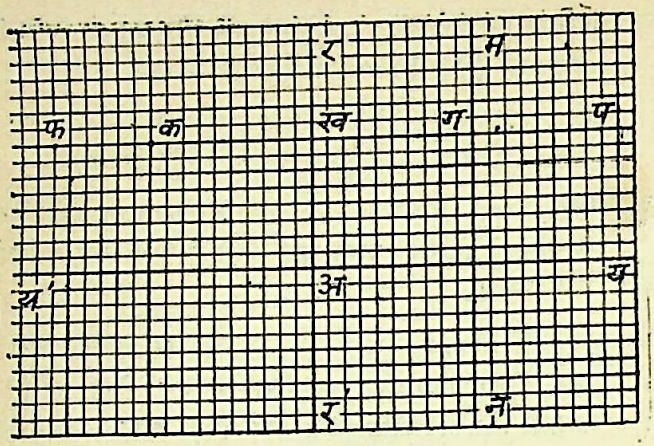
ग्राफ पेपर (Graph paper) पर निम्न बिन्दुओं का आलेखन करो :—

(—१०, ८) (०, ८), (१०, ८)

इन बिन्दुओं के क्रमशः क, ख और ग नाम रख कर इनको क्रम से मिलाओ। हम देखते हैं कि इन तीनों बिन्दुओं के मिलाने से सरल रेखा बनती है। इन तीनों बिन्दुओं का कोटि कितना-कितना है ? (चित्र १६·५)।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



चित्र १६·५

रेखा क ग को दोनों ओर बढ़ाओ। बिन्दु (१८, ८) को आलेख करो। हम देखते हैं कि यह बिन्दु प भी इसी रेखा क ग पर है। सरल रेखा क ग पर कोई बिन्दु फ लो और उसका कोटि मालूम करो।

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक बिन्दु जिसका कोटि ८ है, इस सरल रेखा क ग पर है और इस रेखा पर के प्रत्येक बिन्दु का कोटि ८ है।

यदि कोटि को र से प्रकट करें तो समीकरण र=८ सरल रेखा क ग से प्रदर्शित होती है। अतः समीकरण र=८ का लेखाचित्र (Graph) सरल रेखा क ग है। हम देखते हैं कि क ख ग य-अक्ष के समान्तर है।

इसी प्रकार समीकरण य=१० का लेखाचित्र ऋजु रेखा म न है।

इससे प्रकट है कि समीकरण र=० का लेखाचित्र य-अक्ष और समीकरण य=० का लेखाचित्र र-अक्ष है।

समीकरण र—२य=३ के लेखाचित्र खींचने पर विचार करो

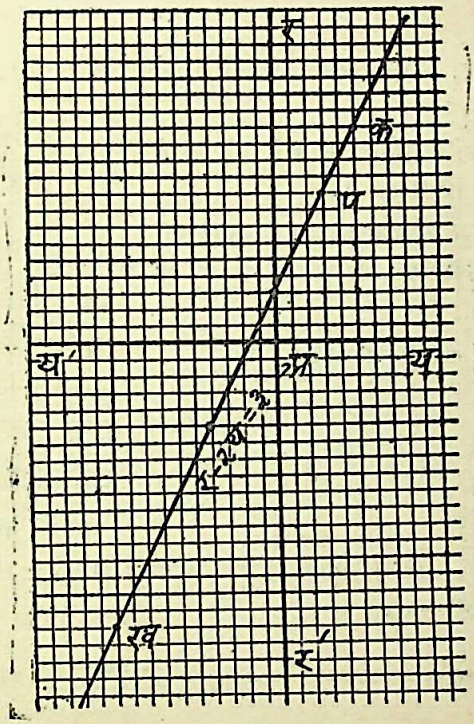
इसके लिये हमें य और र के कुछ ऐसे मान लेने चाहिये जो इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हों। ऐसा करने के लिए समीकरण को निम्न प्रकार रखो :—

र=३+२य

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि य=	०	५	—४	—१०
र=	३	१३	—५	—१७



चित्र १६·६

पैमाना—छोटे वर्ग की भुजा की लम्बाई को इकाई माना गया है।

उपरोक्त बिन्दुओं को आलेख करके मिलाने पर ऋजु रेखा क ख प्राप्त होती है। (चित्र १६·६)।

ऋजु रेखा क ख पर कोई बिन्दु प लो। उसके निर्देशांक (३, ९) हैं। उपरोक्त समीकरण में य=३ और र=९ रखने से यह सन्तुष्ट हो जाती है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इससे स्पष्ट है कि रेखा क ख पर का प्रत्येक बिन्दु इस समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

अतः उपरोक्त समीकरण का लेखाचित्र ऋजु रेखा क ख है।

अतः किसी सरल समीकरण का लेखाचित्र (Graph) एक ऋजु रेखा है जिस पर का प्रत्येक बिन्दु उस समीकरण को सन्तुष्ट करता है और वह प्रत्येक बिन्दु जो उस समीकरण को सन्तुष्ट करता है उस ऋजु रेखा पर स्थित है।

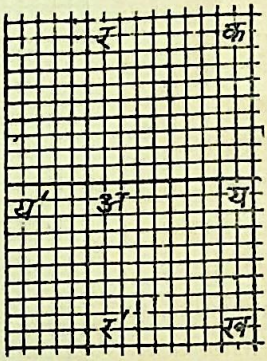
उदाहरण १. निम्न समीकरण का लेखाचित्र (Graph) खींचो :—

य = १०

पैमाना—छोटे वर्ग की लम्बाई को इकाई माना गया है। (चित्र १६·७)

मूल बिन्दु अ से अ य पर १० इकाई ली और वहाँ से र-अक्ष के समान्तर रेखा क ख खींची।

रेखा क ख अभीष्ट लेखाचित्र है।



चित्र १६·७

उदाहरण २. निम्न समीकरण का लेखाचित्र (Graph) खींचो :—

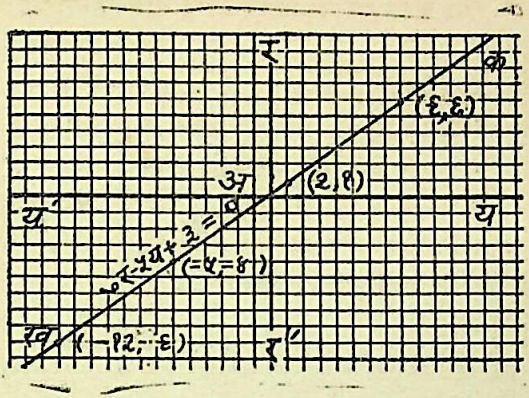
७र — ५य = — ३

क्रिया : ७र — ५य = — ३ : अर्थात्, $र = \frac{५य - ३}{७}$

यदि य	२	९	—५	—१२
र	१	६	—४	—९

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



चित्र १६·८

बिन्दुओं का आलेखन करके मिलाने पर ऋजु रेखा कख प्राप्त होती है। (चित्र १६·८)।

अतः ऋजु रेखा कख अभीष्ट लेखाचित्र है।

टिप्पणी : (१) य के मान ऐसे पूर्णांक मानो जिससे र के संगत मान भी पूर्णांक हों।

(२) वैसे तो ऋजु रेखा केवल दो ही बिन्दुओं से बन जाती है परन्तु सावधानी के लिये कम से तीन बिन्दु अवश्य आलेख करने चाहिये। बिन्दु अधिक निकट नहीं होने चाहिए।

(३) समीकरण ७र—५य=—३ के लेखाचित्र को व्यंजक $\frac{५य-३}{७}$ का लेखाचित्र भी कहते हैं।

यदि हमें व्यंजक ३य—२ का लेखाचित्र खींचना है तो समीकरण र=३य—२ का लेखाचित्र ही अभीष्ट लेखाचित्र होगा।

प्रश्नावली ८४

निम्न समीकरणों के लेखाचित्र खींचो :—

१. य=१२ २. य=—६

३. य=—७ ४. य+१०=०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. य = र
६. य — ५र = ०
७. ३य = ५र
८. २य — ३र = १
९. ३य — २र = १८
१०. ८र — १३य — २ = ०
११. $\frac{य}{३} + \frac{र}{४} = १$
१२. $\frac{य}{२} - \frac{र}{८} = २$
१३. $\frac{य}{२} - \frac{र}{३} = १$
१४. $\frac{र}{३} = \frac{य - १}{४}$

निम्न व्यंजकों का लेखाचित्र खींचो :—

१५. २य — ५
१६. $\frac{३य - ८}{७}$
१७. ५य + ३
१८. $\frac{य + ६}{४}$

१९. समीकरण २य + र = १ का लेखाचित्र खींचो और उस पर उस बिन्दु का भुज बताओ जिसका कोटि ११ है।

युगपत् समीकरण का हल करना
(Solution of Simultaneous Equations)

उदाहरण : निम्न को लेखाचित्र द्वारा (Graphically) हल करो :—

य + र = ९ .....(१)

३य — २र = ७ .....(२)

एक ही अक्षों (Axes) के विचार से दोनों समीकरणों के लेखाचित्र (Graphs) खींच लेते हैं।

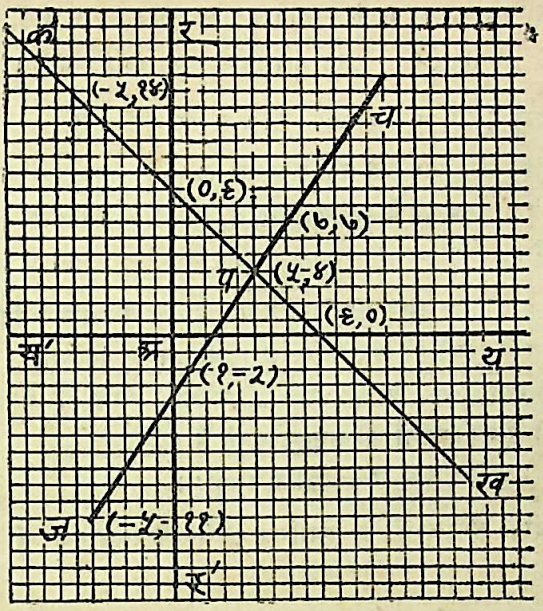
पैमाना : छोटे वर्ग की भुजा की लम्बाई को इकाई माना।

(१) से, र = ९ — य

यदि य	०	९	—५
र	९	०	१४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



चित्र १६·९

बिन्दुओं को आलेख करके उनको मिलाने पर रेखा कख प्राप्त होती है।

∴ समीकरण (१) का लेखाचित्र ऋजु रेखा कख है। (चित्र १६ ९)

२ से, $र = \frac{३य - ७}{७}$

यदि य =	१	७	—५
र =	—२	७	—११

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इन बिन्दुओं को आलेख करके मिलाने पर रेखा चज प्राप्त होती है।

∴ समीकरण (२) का लेखाचित्र ऋजु रेखा चज है।

ये दोनों ऋजु रेखाएँ एक-दूसरे को बिन्दु प पर काटती हैं।

हम जानते हैं कि रेखा कख पर के प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (१) को तथा रेखा चज पर के प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (२) को सन्तुष्ट करते हैं।

चूँकि ये रेखाएँ एक दूसरे को बिन्दु प पर काटती हैं इसलिये बिन्दु प के निर्देशांक दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे। बिन्दु प के निर्देशांक (५, ४) हैं। दोनों समीकरणों में य = ५ और र = ४ रख कर देखने से पता चलता है कि ये मान दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं।

∴ अभीष्ट हल य = ५ और र = ४।

टिप्पणी : दोनों समीकरणों के लेखाचित्र खींचने के लिये एक ही पैमाना मानना चाहिये।

उदाहरण : निम्न समीकरणों को लेखाचित्र द्वारा हल करो :—

य + २र — ४ ·····(१)

३य — ४र = २ ·····(२)

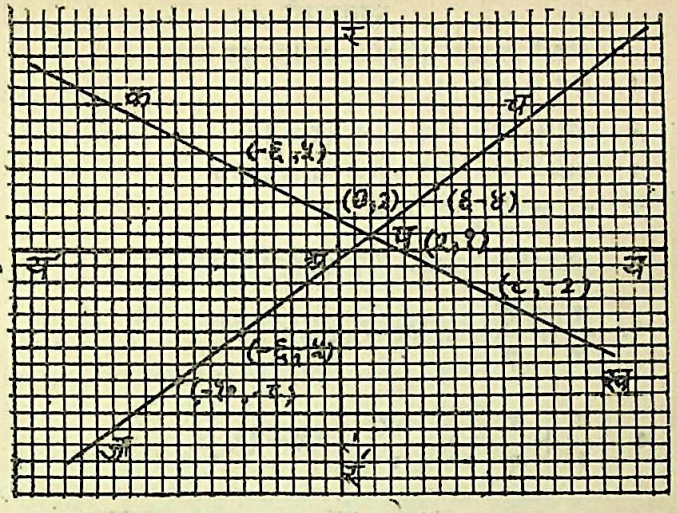
पैमाना : छोटे वर्ग की भुजा की लम्बाई को इकाई माना।

(१) से, $र = \frac{४ - य}{२}$

यदि य	०	८	—६
र	२	—२	५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



चित्र १६·१०

समीकरण (१) का लेखाचित्र ऋजु रेखा कख है। (चित्र १६·१०)।

(२) से, $र = \frac{३य - २}{४}$

यदि य	६	—६	—१०
र	४	—५	—८

समीकरण (२) का लेखाचित्र ऋजु रेखा चज है।

दोनों रेखाएं बिन्दु प पर एक-दूसरे को काटती हैं।

बिन्दु प के निर्देशांक (२, १) हैं। ∴ य = २, र — १ उत्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ८५

लेखाचित्र द्वारा (Graphically) हल करो :—

१. $य+र=१२,\ य-र=२$

२. $४य+३र=१३,\ ३य+२र=११$

३. $५य-३र=११,\ २र-३य+४=०$

४. $र-य=२,\ ३य-२र=५$

५. $३र-८=-२य,\ ५र-१४=-४य$

६. $\frac{य}{४}+\frac{र}{३}=४,\ ४य-५र=२$

७. $\frac{य}{३}+\frac{र}{२}=०,\ \frac{७य}{२}-३र=१६\frac{१}{२}$

८. $\frac{२य}{३}+\frac{३र}{४}=१२,\ \frac{र}{२}-\frac{य}{६}=\frac{५}{२}$

९. निम्न ऋजु रेखाओं के लेखाचित्र खींचो और उनसे बने हुए त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात करो :—

$२य+र=५,\ य+२र=७,\ य-र=१$

१०. निम्न समीकरणों के लेखाचित्र खींचो और उनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो :—

$२य-र=३,\ २र-य=६$

रेखाचित्र द्वारा यह भी बताओ कि $र-य=१$ ऋजु रेखा उसी बिन्दु में होकर जाती है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १७

लघुगणक अथवा लॉगेरिथ्म
(LOGARITHMS)

लॉगेरिथ्म (Logarithms)—हम जानते हैं कि $३^{४}=८१$

इस प्रकार ४ वह घात है जिसको ३ पर चढ़ाने के फलस्वरूप ८१ प्राप्त होता है।

पुनः, $५^{३}=१२५$

इस प्रकार ३ वह घात है जिसे ५ पर चढ़ाने के फलस्वरूप १२५ प्राप्त होता है।

वह घात मालूम करो जिसको यदि २ पर चढ़ाया जाये तो फल ३२ हो ?

स्पष्ट है कि अभीष्ट घात ५ है, क्योंकि $२^{५}=३२$

इस ५ घात को ३२ संख्या का २ के आधार के लिये लॉगेरिथ्म कहते हैं।

८१ का ३ के आधार के लिये क्या लॉगेरिथ्म है ?

स्पष्टतया ४, क्योंकि $३^{४}=८१$

यदि $क^{य}=न$, तो आधार क पर न का लॉगेरिथ्म य है।

इसी सम्बन्ध को दूसरे ढंग से हम इस प्रकार प्रगट करते हैं :

$$य=लॉग_{क}न$$

इसे न का लॉगेरिथ्म आधार क पर पढ़ते हैं।

परिभाषा—किसी दिये हुए आधार पर किसी भी संख्या का लॉगेरिथ्म वह घातांक है, जिसको आधार पर चढ़ाने से वही संख्या प्राप्त होती है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ८६

निम्न समीकरणों को लॉगेरिथ्म के रूप में लिखो :—

१. $२^{६}=६४$ २. $३^{५}=२४३$

३. $६^{३}=२१६$ ४. $५^{३}=१२५$

निम्न को घात के रूप में लिखो :—

५. लॉग$_{२}$ ३२ = ५ ६. लॉग$_{७}$ ३४३ = ३

७. लॉग$_{५}$ ६२५ = ४ ८. लॉग$_{क}$ प = न

९. लॉग$_{ख}$ य = म

१०. आधार २ पर लॉग १२८ ज्ञात करो।

घातांकों के नियम

घातांकों के कुछ नियमों को हम जानते हैं, जैसे

(१) $क^{म} \times क^{न} = क^{म+न}$, (२) $क^{म} \div क^{न} = क^{म-न}$

(३) $(क^{म})^{न} = क^{मन}$, (४) $(कख)^{म} = क^{म}ख^{म}$

इन नियमों के आधार पर प्राप्त हुए कुछ निम्न तथ्य भी याद रखने चाहिये :—

(१) $क^{०} = १$, (२) $क^{-म} = \frac{१}{क^{म}}$

(३) $क^{\frac{१}{म}} = \sqrt[म]{क}$, (४) $क^{\frac{म}{न}} = \sqrt[न]{क^{म}}$

लॉगेरिथ्म (Logarithms) के नियम

(१) किसी भी आधार (base) पर इकाई (१) का लॉग शून्य होता है, अर्थात् लॉग$_{क}$ १ = ०

उपपत्ति : ∵ $क^{०} = १$; ∴ लॉग$_{क}$ १ = ०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(२) किसी राशि का लॉग उसी आधार पर १ होता है, अर्थात्

$\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{क} = १$

उपपत्ति : $\because\ \text{क}^{१} = \text{क},\ \therefore\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{क} = १$

(३) दो राशियों के गुणनफल का योग उन राशियों के लॉगेरिथ्मों के योगफल के बराबर होता है अर्थात्

$\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{मन} = \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} + \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न}$

मानलिया कि $\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} = \text{य}$ और $\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न} = \text{र}$

$\because\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} = \text{य},\ \therefore\ \text{क}^{\text{य}} = \text{म}$ .....(१)

और $\because\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न} = \text{र},\ \therefore\ \text{क}^{\text{र}} = \text{न}$ .....(२)

(१) और (२) से, $\text{म} \times \text{न} = \text{क}^{\text{य}} \times \text{क}^{\text{र}}$

अर्थात्, $\text{मन} = \text{क}^{\text{य}+\text{र}}$; $\therefore\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{मन} = \text{य} + \text{र}$

अतः $\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{मन} = \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} + \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न}$

(४) दो राशियों के भागफल का लॉगेरिथ्म उन राशियों के लॉगेरिथ्मों के अन्तर के बराबर होता है, अर्थात्

$\text{लॉग}_{\text{क}}\frac{\text{म}}{\text{न}} = \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} - \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न}$

मान लिया कि $\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} = \text{य}$ और $\text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न} = \text{र}$

$\because\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{म} = \text{य},\ \therefore\ \text{क}^{\text{य}} = \text{म}$

और $\therefore\ \text{लॉग}_{\text{क}}\ \text{न} = \text{र},\ \therefore \text{क}^{\text{र}} = \text{न}$

$$\therefore\ \frac{\text{म}}{\text{न}} = \frac{\text{क}^{\text{य}}}{\text{क}^{\text{र}}} = \text{क}^{\text{य}-\text{र}}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ लॉग$_{\text{क}}$ $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ = य − र ;

$\therefore$ लॉग$_{\text{क}}$ $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ = लॉग$_{\text{क}}$ म − लॉग$_{\text{क}}$ न

(५) किसी राशि के घात का लॉगेरिथ्म घात के घातांक और उस राशि के किसी आधार पर लॉगेरिथ्म के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

लॉग$_{\text{क}}$ म^{न} = न लॉग$_{\text{क}}$ म

मान लिया कि लॉग$_{\text{क}}$ म = य ; $\therefore$ क^{य} = म

$\therefore$ म^{न} = (क^{य})^{न} = क^{यन}

$\therefore$ लॉग$_{\text{क}}$ म^{न} = यन = न लॉग$_{\text{क}}$ म

(६) किसी आधार पर किसी राशि का लॉगेरिथ्म नये आधार पर उस राशि के लॉगेरिथ्म और पहले आधार पर नये आधार वाली राशि के लॉगेरिथ्म के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

लॉग$_{\text{ग}}$ क = लॉग$_{\text{ख}}$ क × लॉग$_{\text{ग}}$ ख

मान लिया कि लॉग$_{\text{ग}}$ क = य और लॉग$_{\text{ख}}$ क = र

$\because$ लॉग$_{\text{ग}}$ क = य, $\therefore$ ग^{य} = क

और $\because$ लॉग$_{\text{ख}}$ क = र, $\therefore$ ख^{र} = क

$\therefore$ ग^{य} = ख^{र}

$\therefore$ लॉग$_{\text{ग}}$ ग^{य} = लॉग$_{\text{ग}}$ ख^{र}

अर्थात् य लॉग$_{\text{क}}$ ग = र लॉग$_{\text{ग}}$ ख

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात् $य \times १ = लॉग_{ख}\, क \times लॉग_{ग}\, ख$

$\therefore\ लॉग_{ग}\, क = लॉग_{ख}\, क \times लॉग_{ग}\, ख$

(७) सिद्ध करो कि $लॉग_{ख}\, ग = \frac{१}{लॉग_{ग}\, ख}$

हम जानते हैं कि $लॉग_{ग}\, क = लॉग_{ख}\, क \times लॉग_{ग}\, ख$

इसमें क के स्थान पर ग रख कर,

$$लॉग_{ग} = लॉग_{ख}\, ग \times लॉग_{ग}\, ख$$

$\therefore\ १ = लॉग_{ख}\, ग \times लॉग_{ग}\, ख\ (\because\ लॉग_{ग}\, ग = १)$

$\therefore\ लॉग_{ख}\, ग = \frac{१}{लॉग_{ग}\, ख}$

सूचना—जब किसी लॉगेरिथ्म के प्रश्न में एक ही आधार का उपयोग किया जाता है तो साधारणतया आधार को लिखते नहीं हैं।

उदाहरण १. आधार $\sqrt{२}$ पर ३२ का लॉगेरिथ्म ज्ञात करो

मान लिया कि $लॉग\ \sqrt{२}^{३२} = य$

$\therefore\ (\sqrt{२})^{य} = ३२$; अर्थात्, $\left(२^{\frac{१}{२}}\right)^{य} = २^{५}$

अर्थात्, $२^{\frac{य}{२}} = २^{५}$; $\therefore \frac{य}{२} = ५$

$\therefore\ य = ५ \times २ = १०$; $\therefore\ लॉग\ \sqrt{२}^{३२} = १०$

उदाहरण २. सिद्ध करो :—

$$लॉग\ \frac{७५}{\sqrt{८^{३}}} = लॉग\ ३ + २\ लॉग\ ५ - \frac{६}{२}\ लॉग\ २$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

क्रिया : लॉग $\frac{७५}{\sqrt{८^{३}}}$ = लॉग ७५ — लॉग $\sqrt{८^{३}}$

= लॉग (३ × ५ × ५) — लॉग $\sqrt{(२^{३})^{३}}$

= लॉग (३ × ५^{२}) — लॉग $\sqrt{२^{९}}$

= लॉग ३ + लॉग ५^{२} — लॉग $२^{\frac{९}{२}}$

= लॉग ३ + २ लॉग ५ — $\frac{९}{२}$ लॉग २ ।

उदाहरण ३. सरल करो :—

लॉग $\frac{८१}{८०}$ + लॉग ४^{२} + लॉग $३\sqrt{१२५}$ — लॉग (४ × ९$^{-२}$)

क्रिया :

लॉग $\frac{८१}{८०}$ + लॉग ४^{२} + लॉग $३\sqrt{१२५}$ — लॉग (४ × ९$^{-२}$)

= लॉग ८१ — लॉग ८० + २ लॉग ४ + लॉग $(१२५)^{\frac{१}{३}}$
— {लॉग ४ + लॉग (९)$^{-२}$}

लॉग ३^{४} — लॉग (२^{४} × ५) + २ लॉग २^{२} + $\frac{१}{३}$ लॉग १२५
— लॉग ४ — लॉग (९)$^{-२}$

= ४ लॉग ३ — (लॉग २^{४} + लॉग ५) + ४ लॉग २ + $\frac{१}{३}$ लॉग ५^{३}
— लॉग २^{२}(— २) लॉग ९

= ४ लॉग ३ — लॉग २^{४} — लॉग ५ + ४ लॉग २ + लॉग ५ — २
लॉग २ + २ लॉग ३^{२}

= ४ लॉग ३ — ४ लॉग २ — लॉग ५ + ४ लॉग २ + लॉग
५ — २ लॉग २ + ४ लॉग ३

= ४ लॉग ३ + ४ लॉग ३ — ४ लॉग २ + ४ लॉग २ — २ लॉग २
— लॉग ५ + लॉग ५

= ८ लॉग ३ — २ लॉग २

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ४. हल करो :—

$क^{२य} = ग^{य+१} \times ख^{४}$

क्रिया : $क^{२य} = ग^{य+१} \times ख^{४}$

अर्थात् लॉग $क^{२य}$ = लॉग $(ग^{य+१} \times ख^{४})$

अर्थात्, २य लॉग क = लॉग $ग^{य+१}$ + लॉग $ख^{४}$

अर्थात्, २य लॉग क = (य + १) लॉग ग + ४ लॉग ख

अर्थात्, २य लॉग क = य लॉग ग = लॉग ग + ४ लॉग ख

अर्थात्, २य लॉग क — य लॉग ग = लॉग ग + ४ लॉग ख

अर्थात्, य(२ लॉग क — लॉग ग) = लॉग ग + ४ लॉग ख

$$\therefore \quad य = \frac{\text{लॉग ग} + ४ \text{ लॉग ख}}{२ \text{ लॉग क} - \text{लॉग ग}}$$

प्रश्नावली ८७

निम्न के लॉगेरिथ्म ज्ञात करो :—

१. आधार २ पर २५६ का,

२. आधार $\sqrt{३}$ पर २७ का,

३. आधार $\sqrt{५}$ पर १२५ का.

४. आधार $३\sqrt{७}$ पर ४९ का

निम्नलिखित को लॉग २, लॉग ३, लॉग ५ और लॉग ७ के रूप में प्रकट करो :—

५. लॉग २२५

६. लॉग $\frac{२०}{९}$

७. लॉग $\frac{६३}{४-२}$

८. लॉग $\frac{२२५}{\sqrt[३]{८२}}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सरल करो :—

९. ६ लॉग $\frac{१५}{१६}$ + लॉग $२^{४}$ — लॉग $५^{६}$ — लॉग $९^{३}$

१०. लॉग $\frac{१}{२५}$ + लॉग $\frac{१०}{\sqrt{१२}}$ + $\frac{१}{२}$ लॉग $\frac{(४९)^{२}}{\sqrt{८१}}$ — $\frac{२}{३}$ लॉग $\frac{७३}{१०}$

११. लॉग $\frac{१७१}{६५}$ + लॉग $\frac{१०४}{५७}$ — ३ लॉग $\frac{४^{२}}{३}$ — लॉग १

१२. $\frac{३}{२}$ लॉग $\frac{४}{७५}$ + लॉग $\frac{४२}{\sqrt{९}}$ — $\frac{१}{२}$ लॉग $\frac{१}{\sqrt{६२५}}$

सिद्ध करो :—

१३. लॉग $\frac{७५}{१६}$ — २ लॉग $\frac{५}{९}$ + लॉग $\frac{३२}{२४३}$ = लॉग २

१४. ७ लॉग $\frac{१०}{९}$ — २ लॉग $\frac{२५}{२४}$ + ३ लॉग $\frac{८१}{८०}$ = लॉग २

१५. लॉग $\frac{१}{१५}$ + लॉग $\frac{२५^{२}}{३\sqrt{८^{२}}}$ + लॉग $\frac{२७^{२}}{४^{-१}}$ = — २ लॉग ५

१६. लॉग $\frac{\sqrt{६४ \times ३}\ \sqrt{२७ \times ८}}{\frac{५}{२४} \times ३\sqrt{१२५ \times १२८}}$ = $\frac{७}{२}$ लॉग २ + २ लॉग ३ — २ लॉग ५

हल करो :—

१७. $क^{य} = ख^{य-१}$

१८. $क^{य+२} \times ख^{५} = क^{४} \times ख^{य}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१९. $क^{२य-१} \times ख^{१} = ख^{य+२} \times क^{७}$

२०. $२^{य} \times ३^{य+४} = ७^{य}$

२१. $७^{२य} \div २^{य-४} = ३^{३य-७}$

लॉगेरिथ्म की साधारण पद्धति
(Common System of Logarithms)

लॉगेरिथ्म की जिस पद्धति का हम साधारणतया प्रयोग करते हैं उसमें आधार १० लिया जाता है। इसलिये यदि कोई आधार न दिया हो तो उसे सदैव १० समझना चाहिये। इस पद्धति को लॉगेरिथ्म की साधारण पद्धति (Common System of Logarithms) कहते हैं।

पूर्णांश (Characteristic) और अपूर्णांश (Mantissa)—

$$\because \quad १०^{२} = १००, \quad \therefore \quad लॉग_{१०}\ १०० = २$$

$$और \quad \because \quad १०^{३} = १०००, \quad \therefore \quad लॉग_{१०}\ १००० = ३$$

इसलिए १०० और १०००, के बीच की किसी संख्या जैसे १५० का लॉगेरिथ्म २ और ३ के बीच अर्थात् २ से अधिक और ३ से कम होगा। इसलिये यह लॉगेरिथ्म (२+भिन्न) होगा, अर्थात् इस लॉगेरिथ्म में पूर्ण और भिन्नात्मक दोनों भाग होंगे। पूर्ण भाग को पूर्णांश (characteristic) और भिन्नात्मक भाग को अपूर्णांश (Mantissa) कहते हैं। जैसे लॉग १५०= २·१७६१, इसमें पूर्णांश ·१७६१ है।

ऋणात्मक पूर्णांश (Negative Characteristic)—

$\frac{१}{३}$ के लॉगेरिथ्म पर विचार करो।

$$लॉग \frac{१}{३} = लॉग\ १ - लॉग\ ३$$

$$= ० - ·४७७१ = - ·४७७१$$

अतः लॉग $\frac{१}{३}$ ऋणात्मक है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसी प्रकार प्रत्येक सम भिन्न का लॉगेरिथ्म ऋणात्मक है।

सुविधा के लिए यह मान लिया गया है कि समस्त लागेरिथ्मों के अपूर्णांशों (Mantissa) को धन (Positive) रखा जाय।

ऋणात्मक अपूर्णांश को धनात्मक अपूर्णांश में बदलने के लिये जो क्रिया अपनाई गई है उसको समझने के लिये निम्न उदाहरण पर विचार करो :—

मानलो किसी मनुष्य के पास कुछ भी धन नहीं है बल्कि उसे उलटे ६० पैसे ऋण के देने हैं, अर्थात् उसके पास ६० पैसे ऋणात्मक हैं। वह किसी दूसरे व्यक्ति से १ रुपया उधार लेकर ६० पैसे ऋण के दे देता है और ४० पैसे उसके पास शेष रह जाते हैं। इस प्रकार अब उसको १ रुपया ऋण देना है और ४० पैसे उसके पास हैं अर्थात् उसके पास १ रुपया ऋणात्मक और ४० पैसे धनात्मक हैं।

यही रीति ऋणात्मक अपूर्णांश को धनात्मक अपूर्णांश में बदलने के लिये अपनाई गई है। ऋणात्मक अपूर्णांश में इकाई (१) जोड़ देने से जो आता है वह तो धनात्मक अपूर्णांश है और जो इकाई ली है वह ऋणात्मक पूर्णांश (Negative characteristic) है। जैसे—

$$\text{लॉग } \tfrac{१}{३} = -\cdot ४७७१$$
$$= -१ + (१ - \cdot ४७७१)$$
$$= -१ + \cdot ५२२९$$

संक्षेप में इसको निम्न प्रकार लिखते हैं।

$$= \bar{१}\cdot ५२२९$$

अंक १ के ऊपर जो क्षैतिज रेखा खींची गई है वह बतलाती है कि पूर्णांश ऋण और अपूर्णांश धन है।

यदि किसी संख्या का लॉगेरिथ्म —२·३४२४ है तो इसको निम्न प्रकार लिखेंगे :—

$$-२\cdot ३४२४ = -२ - १ + (१ - \cdot ३४२४)$$
$$= \bar{३}\cdot ६५७६$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पूर्णांश (charaeteristic) ज्ञात करना :—

(i) मानलो संख्या १ से बड़ी है

$\because$ $१०^{०}=१,$ $\therefore$ लॉग $१=०$

$\because$ $१०^{१}=१०,$ $\therefore$ लॉग $१०=१$

$\because$ $१०^{२}=१००,$ $\therefore$ लॉग $१००=२$

$\because$ $१०^{३}=१०००,$ $\therefore$ लॉग $१०००=३$

इत्यादि

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि १ और १० के बीच की संख्या का लॉगेरिथ्म शून्य और १ के बीच में है, अर्थात् उसका पूर्णांश शून्य होगा। १० और १०० के बीच की संख्या का लॉगेरिथ्म १ और २ के बीच में है, अर्थात् उसका पूर्णांश १ है तथा १०० और १००० के बीच की संख्या का लॉगेरिथ्म २ और ३ के बीच में है अर्थात् उसका पूर्णांश २ है। इसी प्रकार १००० और १०००० के बीच की संख्या के लागेरिथ्म का पूर्णांश ३ है। इत्यादि, इत्यादि।

अतः १ से अधिक किसी संख्या के लॉगेरिथ्म का पूर्णांश धनात्मक होता है और उस संख्या के पूर्णांक में जितने अंक होते हैं उनसे १ कम होता है। जैसे १३६८७·४५३ के लागेरिथ्म का पूर्णांश ४ है।

(ii) मान लिया कि संख्या १ से छोटी है।

$\because$ $१०^{०}=१,$ $\therefore$ लॉग $१=०$

$\because$ $१०^{-१}=\frac{१}{१०}=·१$ $\therefore$ लॉग $·१$ $—·१$

$\because$ $१०^{-२}=\frac{१}{१०^{२}}=\frac{१}{१००}=·०१,$ $\therefore$ लॉग $·०१=—२$

$\because$ $१०^{-३}=\frac{१}{१०^{३}}=\frac{१}{१०००}=·००१,$

$\therefore$ लॉग $·००१$ $—३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि १ और ·१ के बीच की किसी संख्या का लॉगेरिथ्म शून्य और —१ के बीच में हैं और इसलिये —१+दशमलव भिन्न के बराबर होगा क्योंकि अपूर्णांश सदा धनात्मक होता है, अर्थात् उसका पूर्णांश $\overline{१}$ है। इसी प्रकार ·१ और ·०१ के बीच की संख्या का लॉगेरिथ्म —१ और —२ के बीच में है और इसलिए —२+दशमलव भिन्न के बराबर होगा, अर्थात् उसका पूर्णांश $\overline{२}$ है। इसी प्रकार ·०१ और ·००१ के बीच की संख्या के लॉगेरिथ्म का पूर्णांश $\overline{३}$ है।

अतः १ से कम किसी दशमलव भिन्न के लॉगेरिथ्म का पूर्णांश ऋण होता है और उस भिन्न में दशमलव बिन्दु के ठीक बाद जितने शून्य होते हैं उनकी गिनती से एक अधिक होता है। जैसे ·०००५७६ के लॉगेरिथ्म का पूर्णांक $\overline{४}$ और ·३५६४ के लॉगेरिथ्म का पूर्णांश $\overline{१}$ है।

अपूर्णांश (Mantissa) का विशेष गुण :—

निम्नलिखित पर विचार करो :—

मान लिया लॉग ४२५·७ = ३·६२९१

लॉग ४२५·७ = लॉग $\frac{४२५७}{१०}$ = लॉग ४२५७ — लॉग — १०

= ३·६२९१ — १ = २·६२९१

इसी प्रकार लॉग ·४२५७ = लॉग $\frac{४२५७}{१००००}$ = लॉग ४२५७ — लॉग १००००

= ३·६२९१ — ४ = $\overline{१}$·६२९१

इसी प्रकार लॉग ·००४२५७ = लॉग $\frac{४२५७}{१०००००००}$

= लॉग ४२५७ — लॉग १००००००

= ३·६२९१ — ६ = $\overline{३}$·६२९१

इसी प्रकार लॉग ४२५७०० = लॉग ४२५७ × १००

= लॉग ४२५७ + लॉग १००

= ३·६२९१ + २ = ५·६२९१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि जिन संख्याओं के अंक एक से और एक ही क्रम में होते हैं परन्तु दशमलव बिन्दु में अन्तर रहता है उनके लॉगेरिथ्म का अपूर्णांश एक ही होता है। केवल उनके पूर्णांश में अन्तर है।

संख्या के दशमलव बिन्दु को एक स्थान से दूसरे स्थान पर हटाने का प्रभाव केवल लॉगेरिथ्म के पूर्णांश पर ही पड़ता है तथा उसका अपूर्णांश वही रहता है।

लॉगेरिथ्म की साधारण पद्धति के लाभ :—

(१) किसी संख्या के लॉगेरिथ्म का पूर्णांश उस संख्या के पूर्णांकों की गिनती से ही ज्ञात हो जाता है।

(२) जिन संख्याओं के अंक एक से और एक ही क्रम में होते हैं उनके अपूर्णांश समान होते हैं।

प्रतिलॉगेरिथ्म (Antilogarithm) :—

निम्न पर विचार करो :—

लॉग ८ = ·९०३१

हमने अब तक इसका अर्थ यह पढ़ा है कि ८ का लॉगेरिथ्म ·९०३१ है। इसको इस प्रकार भी कह सकते हैं कि ८ वह संख्या है जिसका लॉगेरिथ्म ·९०३१ है। संक्षेप में इसको इस प्रकार कहते हैं कि ·९०३१ का प्रति लॉगेरिथ्म (Antilogarithm) ८ है, अर्थात् प्रतिलॉग ·९०३१ = ८।

अतः किसी दी हुई संख्या का प्रति लॉगेरिथ्म (Antilgoarithm) वह संख्या है जिसका लॉगेरिथ्म दी हुई संख्या है। जैसे

प्रतिलॉग १·८२४८९ = ६६·८१८ क्योंकि लॉग ६६·८१८ = १·८२४८९।

याद रखो,

(१) लॉगेरिथ्म का अपूर्णांश (Mantissa) धनात्मक होता है।

(२) यदि लॉगेरिथ्म के प्रश्न अथवा प्रयोग में आधार नहीं दिया होता तो उसे १० समझना चाहिये।

उदाहरण १. यदि लॉग ३ = ·४४७१ और लॉग ७ = ·८४५१ तो

$\frac{(२·१)^{२}}{(\sqrt[१]{६३})^{२}}$ का लॉगेरिथ्म बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

क्रिया : लॉग $\frac{(२·१)^{२}}{(\sqrt[३]{६३})^{२}}$

$=$ लॉग $(२·१)^{२}$ — लॉग $(६३)^{\frac{२}{३}}$

$=$ लॉग २·१ — $\frac{२}{३}$ लॉग ६३

$=$ २ लॉग $\frac{२१}{१०}$ — $\frac{२}{३}$ लॉग (३ × ३ × ७)

$=$ २ (लॉग २१ — लॉग १०) — $\frac{२}{३}$ (लॉग $३^{२}$ + लॉग ७)

$=$ २ (लॉग ३ × ७ — १) — $\frac{२}{३}$ (२ लॉग ३ + लॉग ७)

$=$ २ (लॉग ३ + लॉग ७ — १) — $\frac{२}{३}$ (२ लॉग ३ + लॉग ७)

$=$ २ लॉग ३ + २ लॉग ७ — २ — $\frac{४}{३}$ लॉग ३ — $\frac{२}{३}$ लॉग ७

$=$ $\frac{२}{३}$ लॉग ३ + $\frac{४}{३}$ लॉग ७ — २

$=$ $\frac{२}{३}$ × ·४७७१ + $\frac{४}{३}$ × ·८४५१ — २

$=$ ·३१८१ + १·१२६८ — २

$=$ — ·५५५१ $=$ $\overline{१}$·४४४९ । उत्तर

उदाहरण २. जब लॉग ७ = ·८४५१ और लॉग २ = ३०१० तो $(८७६)^{१६}$ में अंकों की संख्या बताओ ।

लॉग $(८७५)^{१६}$ = १६ लॉग ८३५

= १६ लॉग (५ × ५ × ५ × ७)

= १६ (३ लॉग ५ + लॉग ७)

$= \left(३ \text{ लॉग } \frac{१०}{२} + \text{लॉग } ७\right)$

= १६ (३ लॉग १० — ३ लॉग २ + लॉग ७)

= १६ (३ — ३ लॉग २ + लॉग ७)

= १६ (३ — ३ × ·३०१० + ·८४५१)

= १६ × २·९४२१ = ४७·०७३६

∴ अभीष्ट अंकों की संख्या = ४८ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. निम्न को धनात्मक अपूर्णांश के रूप में सरल करो :—

$\frac{४}{७}(\overline{६}\cdot३७९८)$

क्रिया : $\frac{४}{५}(\overline{६}\cdot३७९८)=\frac{१}{५}(\overline{२३}\cdot५१९२)$

$=\frac{१}{५}(\overline{२५}+२\cdot५१९२)$

$=\overline{५}\cdot५०३८४$ । उत्तर

उदाहरण ४. हल करो :—

लॉग य = लॉग ·३ = ३ लॉग २ − $\frac{२}{५}$ लॉग ३२

क्रिया : लॉग य = लॉग ·३ + ३ लॉग २ − $\frac{२}{५}$ लॉग ३२

= लॉग ·३ + लॉग $२^{३}$ − $\frac{२}{५}$ लॉग $२^{५}$

= लॉग (·३ × ८) − लॉग $२^{२}$

= लॉग २·४ − लॉग ४

= लॉग $\frac{२\cdot४}{४}$ = लॉग ·६

∴ य = ·६ । उत्तर

प्रश्नावली ८८

निम्न संख्याओं के लॉगेरिथ्मों का पूर्णांश बताओ :—

१. ७	२. ९२
३. ५६७८	४. ·२३५
५. ·०५६७	६. ५·३४
७. ·००२३	८. ३४२·२३

यदि लॉग ८९·६३ = १·९५२४ तो निम्न के लॉगेरिथ्म बताओ :—

९. ८९६३	१०. ·८९६३
११. ·००८९६३	१२. ८९६३००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि लॉग ६९७४ = ३·८४३५, तो निम्न के प्रतिलॉगेरिथ्म बताओ :—

१३. १·८४३५ १४. ·८४३५

१५. १·८४३५ १६. ५·८४३५

१७. ३·८४३५

जब लॉग २ = ·३०१० लॉग ३ = ·४७७१ और लॉग ७ = ·८४५१, तो निम्न के लॉगेरिथ्म ज्ञात करो :—

१८. $\frac{६३}{२}$ १९. $\sqrt{२१^{२}}$

२०. $\frac{३\sqrt{६^{१}}}{\sqrt{९८}}$ २१. $(·६२५)^{\frac{१}{७}}$

२२. $(६·४)^{२} \times (३२)^{\frac{२}{५}} \div (८०)^{\frac{५}{२}}$

जब लॉग २ = ३०·१० तथा लॉग ३ = ·४७७१ तो निम्न में अंकों की संख्या ज्ञात करो :—

२३. $३^{२१}$ २४. $६^{१५}$

२५. $३^{१२} \times २^{८}$

निम्न को धनात्मक अपूर्णांश के रूप में सरल करो :—

२६. —३·४५२१ २७. —·५६७८

२८. $\overline{(१·५५७६)} \times ३$ २९. $\frac{३}{४}\overline{(५·३९७४)}$

३०. ९·८५६ + $\overline{६}$·७९ ३१. ९·२३७४ — $\overline{६}$·५७८६

उदाहरण १. यदि लॉग ३ = ·४७७१ और लॉग २७७२ = ३·४४२८, तो $\sqrt[४]{९०^{५}}$ का मान बताओ।

क्रिया : मानलिया कि अभीष्ट मान य है।

$\therefore$ य = $\sqrt[४]{९०^{५}}$

अर्थात्, लॉग य = $\sqrt[४]{९०^{५}}$

= लॉग $(९०)^{\frac{५}{४}}$ = $\frac{५}{४}$ लॉग ९०

= $\frac{५}{४}$ लॉग $(३^{२} \times १०)$

= $\frac{५}{४}$ (लॉग $३^{२}$ + लॉग १०)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$= \frac{१}{४}$ (२ लॉग ३ + १)

$= \frac{१}{४}$ (२ × ·४७७१ + १)

∴ लॉग य = २·४४२८

∴ य = २७७·२ (∵ प्रति लॉग २·४४२८ = २७७·२)

∴ अभीष्ट मान = २७७·२ । उत्तर

उदाहरण २. यदि लॉग २ = ·३०१०३०० और लॉग ४८४४५४४ = ६·६८५२५३०, तो $(६·०)^{\frac{१}{८८}} \times (४\sqrt{·२५६})^{१} \div \sqrt{८०}$ का मान बताओ। (उ० प्र० १९४६)

क्रिया : मान लिया कि अभीष्ट मान य है।

∴ $य = (६·४)^{\frac{१}{८८}} \times (४\sqrt{·२५६})^{१} \div \sqrt{८०}$

अर्थात्, लॉग य = लॉग $\{(६·४)^{\frac{१}{८८}} \times (४\sqrt{२५६})^{१} \div \sqrt{८०}\}$

= लॉग $(६·४)^{\frac{१}{८८}}$ + लॉग $(४\sqrt{·२५६})^{१}$ − लॉग $\sqrt{८०}$

$= \frac{१}{१०}$ लॉग ६·४ + $\frac{३}{४}$ लॉग ·२५६ − $\frac{१}{२}$ लॉग ८०

$= \frac{१}{१०}$ लॉग $\frac{६४}{१०}$ + $\frac{३}{४}$ लॉग $\frac{२५६}{१०००}$ − $\frac{१}{२}$ लॉग $(२^{३} \times १०)$

$= \frac{१}{१०}$ (लॉग ६४ − लॉग १०) + $\frac{३}{४}$ (लॉग २५६ − लॉग १०००)

− $\frac{१}{२}$ (लॉग $२^{३}$ + लॉग १०)

$= \frac{१}{१०}$ (लॉग $२^{६}$ − १) + $\frac{३}{४}$ (लॉग $२^{८}$ − ३) − $\frac{१}{२}$

(३ लॉग २ + १)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{१}{१०} \times ६ \text{ लॉग } २ - \frac{१}{१०} + \frac{३}{४} \times ८ \text{ लॉग } २ - \frac{९}{४} - \frac{३}{२}$$

$$\text{लॉग } २ - \frac{१}{२}$$

$$= \frac{३}{५} \text{ लॉग } २ + ६ \text{ लॉग } २ - \frac{३}{२} \text{ लॉग } २ - \frac{१}{१०} - \frac{९}{४} - \frac{१}{२}$$

$$\therefore \text{ लॉग } य = \frac{५१}{१०} \text{ लॉग } २ - \frac{५७}{२०}$$

$$= \frac{५१}{१०} \times ·३०१०३०० - २·८५$$

$$= १·५३५१५३ - २·८५$$

$$= -१·३१४८४७०$$

$$\therefore \text{ लॉग } य = \overline{२}·६८५२५३०$$

$$\therefore \quad य = ·०४८४४५४४$$

$\therefore$ अभीष्ट मान $= ·०४८४४५४४$ । उत्तर

उदाहरण ३. ४ प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से १०० रु० कितने वर्षों में १००० रु० हो जावेंगे ? उत्तर दशमलव के दो अंकों तक निकालो । (लॉग १०४ = २·०१७) (उ० प्र० १९५१)

मान लिया कि वर्षों की संख्या = य

$$\therefore \quad \text{मिश्रधन} = \text{मूलधन}\left(१ + \frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{वर्ष}}$$

$$\therefore \quad १००० = १००\left(१ + \frac{४}{१०१}\right)^{य}$$

अर्थात्, $\frac{१०००}{१००} = \left(१ + \frac{१}{२५}\right)^{य}$; अर्थात्, $१० = \left(\frac{२६}{२५}\right)^{य}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात्, लॉग १० = लॉग $\left(\frac{२३}{२५}\right)^{य}$

अर्थात्, १ = य लॉग $\frac{२६}{२५}$

= य लॉग $\frac{१०४}{१००}$

= य (लॉग १०४ — लॉग १००)

= य (२·०१७० — २)

∴ १ = य × ·०१७०

∴ य = $\frac{१}{·०१७०}$ = ५८·८२

∴ अभीष्ट वर्षों की संख्या = ५८·८२ । उत्तर

प्रश्नावली ८९

दिया हुआ है, लॉग २ = ·३०१०, लॉग ३ = ·४७७१ और लॉग ७ = ·८४५१, मान ज्ञात करो :—

१. ४$\sqrt{४२}$, यदि लॉग २५४·६ = २·४०५८

२. $(·०००१८)^{\frac{१}{७}}$ यदि लॉग २९१७ = ३·४६५०

३. $(·१२१)^{\frac{१}{५}}$, यदि लॉग ४२५·८ = २·६२९२

४. $(·००२७)^{\frac{१}{९}}$, यदि लॉग ३६०४ = ३·५५६९

५. $\frac{(८·१)^{\frac{२}{९}} \times (\sqrt{१४·४})^{२}}{३\sqrt{१५०}}$, यदि लॉग १६३·६ = २·२१३८

६. $३\sqrt{\left(\frac{३·५}{\sqrt{२}}\right)^{४}}$, यदि लॉग ३३४८ = ३·५२४८

७. $५\sqrt{·००००००१६५}$, यदि लॉग १६५ = २·२१७५ और लॉग ६९७४ = ३·८४३५ ।

(उ० प्र० १९४५)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. ३७·२०३ × ३·७२०३ × ·००३७२०३ × ३७२०३०, यदि
लॉग ३७·२०३ = १·५७०५७८० और
लॉग १९१५६३१ = ६·२८२३१२०

९. $\left(\frac{३३०}{४९}\right)^{४} \div (२२ \times ७०)^{\frac{१}{३}}$, यदि लॉग ११ = १·०४१४ और
लॉग १७८१४·१५१६ = ४·२५०८

१०. $\sqrt[३]{\left(\frac{२९४ \times १२५}{४२ \times ३२}\right)^{२}}$, यदि लॉग ९०·८० = १·९५८१

११. १६०० रु० का मिश्रधन १२ वर्षों में ५% चक्रवृद्धि ब्याज से मालूम करो। (लॉग २८७४ ३·४५८४)

१२. १००० रु० का ४½ वर्षों में ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जबकि ब्याज छमाही दिया जाता है। (लॉग ४१ = १·६१२८, लॉग १२·५१ = १·०९७२)

१३. कितने समय में कोई धन ५% चक्रवृद्धि ब्याज से अपने का तीन गुना हो जावेगा ?

१४. वह धन बताओ जो ६ वर्ष में ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से १०१२ रु० ५० पैसे हो जावेगा ? (लॉग ७५५४ = ३·८७८२)

१५. एक व्यापारी ने कुछ पूँजी से व्यापार प्रारम्भ किया। उसको प्रतिवर्ष १०% का लाभ हुआ। ५ वर्ष पश्चात् उसके पास कुल पूँजी १०००० रु० की हो गई। उसने कितना धन लगाया था ? (लॉग ११ = १·०४१३, लाग ६२०·९ = २·७९३०)

१६. किसी नगर की जनसंख्या ८०००० है और वह प्रतिवर्ष १०% बढ़ती है। बताओ १० वर्ष में उस नगर की जनसंख्या कितनी हो जायेगी ? (लॉग ११ = १·०४१४, लॉग २०·७५ = ३·३१७०)

१७. किस चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ५ वर्षों मे १५०० रु० का मिश्रधन ३००० रु० हो जावेगा ? (लॉग ११४·९ = २·०६०२)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उत्तरमाला

प्रश्नावली १

(१) हारना (२) + (३) — (४) ६ (५) १५
(६) ३ (७) ८ (८) $३\frac{१}{३}$ (९) $\frac{१}{३}$ (१०) १२१
(११) —२४३ (१२) —५७ (१३) $-\frac{६६}{८}$ (१४) १९४४
(१५) ३७ (१६) $\frac{१}{८८}$ (१७) १८ (१८) ९५२
(१९) ५८ (२०) —५२।

प्रश्नावली २

(१) —१५ य $ल^२$ (२) २कख (३) $\frac{१७क}{१२}$
(४) —३बस^२+७यर^२—५क^{२}ख (५) ६क—२ख+३ख
(६) १३य—३र—१२ल (७) ४य^२+६य
(८) ५य+११र+४७ (९) ६क^२—४कख+६ख^२
(१०) ३क+१०ख—९ब (११) १५कखग+११ब^{२}स—१०य
(१२) ४यर—२क—५ (१३) —१२य^{२}र+६पफ—९
(१४) २कख+२यर (१५) —४ क^२+५ क ख—२ख^२
(१६) —३य^२—५यर - ल^२ (१७) ११य^२+२१यरल—५क^{२}ख
(१८) य^२+६य+३ (१९) —७य+८र+९ल
(२०) २क^२+२ कख+४ख^२ (२१) ६क—७ (२२) १०य+१
(२३) ख^५—ख^४+५ख^२—ख—१ (२४) ७क—५ख+७ग
(२५) —२—प (२६) शून्य (२७) ३य—३र—५ल
(२८) प—११ फ+१७ ब (२९) २७ (३०) ३२
(३१) ८७ (३२) —३।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ३

(१) $४२य^{३}र^{८}ग^{८}$ (२) $-क^{३}ख^{४}ग^{११}$ (३) $८४क^{९}ख^{७}$
(४) $-१४४य^{६}ब^{१०}$ (५) $२७य^{१२}$ (६) $-८१क^{२९}ख^{२६}$
(७) $३ क^{५}ख^{३}-९क^{३}ख^{४}+१२क^{३}ख^{३}ग^{३}$ कि० मी०
(८) $८कख^{३}ग-१२क^{३}खग^{२}+४क^{३}ग^{३}$ वर्ग सेमी०
(९) $२५ क^{३}-९ख^{३}$ (१०) $२क^{३}+५कख+३ख^{३}$
(११) $३य^{३}-५यर+२र^{३}$ (१२) $क^{४}-६क^{३}+११क^{२}-६क-३५$
(१३) $क^{४}+ख^{४}+क^{३}ख^{३}$ (१४) $य^{६}-५य^{४}+३य^{३}+६य^{२}-७य+२$
(१५) $क^{४}-१$ (१६) $१०अ^{३}ब-६अ^{३}ब$ $११अ^{३}ब^{२}+९अ^{३}ब^{२}-६अ^{३}ब^{३}$
(१७) $य^{५}+५य^{४}र+१०य^{३}र^{२}+१०य^{२}र^{३}+५यर^{४}+र^{५}$
(१८) $१+१८यर-२७य^{3}+८र^{३}$ (१९) $प^{३}+फ^{३}+ब^{३}-३पफब$
(२०) $क^{६}-३क^{५}+४क^{४}-५क^{३}+६क^{२}-४क+१$

(२१) $\frac{क^{३}}{ख^{३}}-\frac{ख^{३}}{क^{३}}$ (२२) $क^{४}-१६$ (२३) $य^{४}-र^{४}$

(२४) $१६क^{४}-८१ख^{४}$ (२५) $य^{८}+य^{४}र^{४}+र^{८}$ (२६) $३क^{२}+३ख^{२}$
(२७) $-४य^{२}-५य$ (२८) $-१०क^{५}+१५क^{४}+१५क^{३}+३०क^{२}$
(२९) $-६य^{६}+१२य^{५}+२४य^{४}-१२य^{३}-२४य^{२}$
(३०) $क^{३}+३कख+ख^{३}-१$ (३१) $य^{४}र^{४}-१६$
(३२) $६क^{३}+९कख-२कख^{२}-३ख^{३}$
(३३) $३य^{४}-४य^{३}र+५य^{२}-९य^{३}+१२य^{२}र-१५य$ वर्ग मीटर
(३४) $क^{४}+क^{३}+५क^{२}+५क+१२$
(३५) $क^{५}-३क^{४}+९क^{३}-१९क^{२}+३२क-१६$ ।

प्रश्नावली ४

(१) $-\frac{७}{२}क^{२}ख^{५}ग^{३}$ (२) $क^{प-न}$ (३) $कख-२$ (४) $य+२$

(५) $४ क+११$ (६) $२ क+३ ख$ (७) $क^{२}+४ क+३$
(८) $य^{३}-४य^{२}+य+६$ (९) $२य^{२}-य+१$ (१०) $२ख^{२}-ख+३$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(११) $य^2+य-य र+र+१+र^2$ (१२) $क^3+क^2+क+१$
(१३) $क^2+ख^2+ग^2-कख-खग-कग$
(१४) $य^2+४र^2+१६+२यर+४य-८र$ (१५) $य+र+ल$
(१६) $क^2+ख^2+ग^2+कख-कग+खग$ (१७) $य^2-२यर+र^2$
(१८) $-यरल-रल^2+य^2ल$ (१९) $य^3+य^2र+यर^2+र^3$
(२०) २क+१ (२१) ५ (२२) $कख^2+३ख^3$ (२३) २क+३ख
(२४) $क^2+५कख-३ख^2$ (२५) $य^2+२य+१$
(२६) $२८प^4-७१प^3-३५प^2+३०प+९$
(२७) $३क^3+७क^2-६क+५$ (२८) १५ (२९) −५
(३०) ५य+३ रुपये (३१) $क^2-३कख+ख^2$ किमी प्रति घंटा
(३२) $य^2+यर+र^2$।

प्रश्नावली ५

(१) $४य^2+१२यर+९र^2$ (२) $४क^4+१२क^2ख^3+९ख^6$

(३) $९क^2ख^2+२४कखयल+१६र^2ल^2$ (४) $य^2+\frac{१}{य^2}+२$

(५) १०४०४ (६) १००४००४ (७) ५८ (८) ±११ (९) ७
(१०) ४७ (११) ४७ (१२) ±४ (१३) ±३ (१४) $म^2-२$।

प्रश्नावली ६

(१) $य^2-४यर+४र^2$ (२) $१४४ क^2-३६० क ख+२२५ ख^2$

(३) $क^4ख^2-२क^3ख^3+क^2ख^4$ (४) $\frac{क^2}{ख^2}-२+\frac{ख^2}{क^2}$

(५) $य^2+\frac{१}{य^2}-२$ (६) २४०१ (७) ९९४००९ (८) १७

(९) ±५ (१०) १८ (११) ४ (१२) ११९ (१३) ±८
(१४) ±६ (१५) ±१५ (१६) ±२ (१७) $±२\sqrt{१०}$
(१८) $±२\sqrt{१७}$ (१९) $±\sqrt{२१}$ (२०) $±४\sqrt{६}$ (२१) ८
(२२) २५ (२३) २४ और ७३।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ७

(१) $य^२+र^२+ल^२+२यर-२रल-२लय$

(२) $९क^२+४+१६ख^२-१२क \quad १६ख+२४कख$

(३) $य^२+र^२+ल^२+ग^२+२यर-२यल-२गय-२रल-२गर+२गल$

(४) $२५य^२+र^२+१६ल^२+८ब^२+१०यर-४०यल-२०यब-८रल$
$-४रब+१६लब$ (५) १४ (६) ८ (७) १६ (८) ± १२

प्रश्नावली ८

(१) $क^२-१$ (२) $४य^२-९र^२$ (३) $१६क^२-२५ख^२$
(४) $य^२र^२-क^२ख^२$ (५) $य^४र^६-क^२ख^६$ (६) $१६क^४ख^२+२५क^२ख^४$
(७) $क^२+ख^२-ग^२+२कख$ (८) $क^४+क^२ख^२+ख^४$ (९) ९९९९१९
(१०) ३९९९६०० (११) $क^८-ख^८$ (१२) $य^८-१$
(१३) $य^८-२५६$ (१४) $२५६क^८-६५६१$ (१५) ± ५
(१६) ± ३ (१७) $\pm ८\sqrt{५}$ (१८) $\pm ३\sqrt{५}$ (१९) $\pm ४०\sqrt{६}$।

प्रश्नावली ९

(१) $य^३-र^३$ (२) $य^३-१$ (३) $८क^३-२७ख^३$ (४) $८क^३-१२५$
(५) $य^३+र^३$ (६) $य^३+१$ (७) $८य^३+३४३$ (८) $८य^३+१२५ब^३$
(९) ४३२ (१०) -६१ (११) २८६३ (१२) ९९९

(१३) $१२४\frac{१२४}{१२५}$।

प्रश्नावली १०

(१) $८क^३+१२क^२+६क+१$ (२) $य^३+९य^२र+२७यर^२+२७$
(३) $८य^३+३६य^२र+५४यर^२+२७र^३$
(४) $८य^६+३६य^४र^२+५४य^२र^४+२७र^६$

(५) $य^३+३य+\frac{३}{य}+\frac{१}{य^३}$ (६) $य^६+३य^२+\frac{३}{य^२}+\frac{१}{य^६}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(७) $य^3 + ८र^3 + २७ल^3 + ६य^2र + १२यर^2 + ३६र^2ल + ५४रल^2 + २७ल^2य + ९लय^2 + ३६यरल$ (८) $८क^3 + २७ख^3 + ६४ग^3 + ३६क^2ख + ५४कख^2 + १०८ख^2ग + १४४खग^2 + ९६ग^2क + ४८गक^2 + कखग$ (९) ९१ (१०) ७२ (११) १८ (१२) ० (१३) २ (१४) $\pm १०\sqrt{२}$।

प्रश्नावली ११

(१) $य^3 - ३य^2र + ३यर^2 - र^3$

(२) $८क^3 - ६०क^2ख + १५०कख^2 - १२५ख^3$

(३) $८क^9र^3 - ३६क^6र^4 + ५४क^3र^2 - २७र^6$

(४) $क^3 - ३क + \frac{३}{क} - \frac{१}{क^3}$ (५) $क^3 - ख^3 - ग^3 - ३क^2ख + ३कख^2 - ३ख^2ग - ३खग^2 - ३ग^2क - ३गक^2 + ६कखग$ (६) $८क^3 - २७ख^3 + ६४ग^3 + ३६क^2ख + ५४कख^2 + १०८ख^2ग - १४४खग^2 + ९६ग^2क + ४८गक^2 - १४४कखग$ (७) ३३५ (८) २९६ (९) १ (१०) ३६ (११) $५\sqrt{२}$ (१२) $य^3 + ३य$ (१३) २७८६ (१४) $८\sqrt{५}$।

प्रश्नावली १२

(१) ग(य+ल) (२) ३ क+ख+ग) (३) कख(क−ख)
(४) २यर(य−र) (५) $क^2$(क−ख) (६) $क^2(३क^2 + २क - १)$
(७) $५य^2र^2(य - २र^2 + ३य^2र)$ (८) कखग(क+ख−ग)
(९) $र^2(२यरल^2 - ३ल^2 + ५य^2र)$ (१०) (र+ल)(य−२ब)
(११) (ख+ग)$(क^2 - कय + य^2)$ (१२) $२(य^2 - र)$(क+२ख−४)
(१३) क(य+र−ल)(क+ख−ग) (१४) (क−ख)(य−र)(क−ख+य−र) (१५) $२(क - १)^2$(य+ल)(३क−४य−४ल+३)

प्रश्नावली १३

(१) (य−२ल) (३र−ल) (२) (प−२फ) (प+ब)
(३) (य−ल) (२य−३र) (४) (क−ख) (क+२ग)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(५) (य—३) ($य^२$+१) (६) $क^२$ (क+१) ($क^२$+१)
(७) ख(क- ख) ($क^२$+$ख^२$) (८) कख (२क—३ख) ($क^२$+$ख^२$)
(९) (य+ब) (र+ल+य) (१०) (क—ख—ग) (य—र)
(११) (य—र) ($यर^२$+१) (१२) (क+खग) (ख+गक)

(१३) (प—फ) $\left(प-\frac{१}{फ}\right)$ (१४) २(क+ख) (२क+२ख—१)

(१५) ($क^२$+$र^२$) ($ख^२$+$ल^२$) ।

प्रश्नावली १४

(१) $(२य+५)^२$ (२) $(३य^२+४)^२$ (३) $(३कख+५ग)^२$
(४) $(३क-४)^२$ (५) $(४य-५र)^२$ (६) $(९यर-८ग)^२$

(७) $क^२$ $(२य+३ख)^२$ (८) $\left(क+\frac{१}{क}\right)^२$ (९) $\left(२य-\frac{१}{२य}\right)^२$

(१०) $(२६क+ख)^२$ (११) $(११य+६र)^२$ (१२) $(क^२+ख^२-३ग^२)^२$
(१३) ४ (र+ल)^२ (१४) (य—२र+३ल)^२
(१५) $(२क+५ख+१)^२$ ।

प्रश्नावली १५

(१) (य+र) (य—र) (२) (५+य) (५य—य)
(३) (क+८)(क—८) (४) (क+१) (क—१)
(५) (५क+४ख) (५क—४ख) (६) (२कख+३यर) (२कख—३यर)
(७) (८यर+५लव) (८यर—५लव) (८) ($य^२$+$र^२$)(य+र)(य—र)
(९) ($क^४$+$ख^४$) ($क^२$+$ख^२$) (क+ख) (क—ख)
(१०) (४$क^२$+९$ख^२$) (२क+३ख) (२क—३ख)
(११) यर($य^२$+$र^२$) (य+र) (य—र)
(१२) ३(१+९$य^२र^२$) (१+३यर) (१—३यर)
(१३) यर(४$य^२$+२५$र^२$) (२य+५र) (२य—५र)
(१४) २पफ(४$प^२$+३$फ^२$) (४$प^२$—३$फ^२$)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१५) (क+ख+४) (क+ख−४)
(१६) (१०+२य+३र)(१०−२य−३र)
(१७) (क+य+१) (क−य−१) (१८) ३य(य+२र)
(१९) (५क−ख) (क−५ख)
(२०) {क (य+र)+ख (य−र)} {क(य−र)+ख(य+र)}
(२१) ४क(ख−ग) (२२) ४क^{२}ख^{२} (२३) ४क(३ग−२ख)
(२४) ११०,००० (२५) १९० (२६) २ ।

प्रश्नावली १६

(१) (य+र+क) (य+र−क) (२) (क^{२}+क+१)(क^{२}−क−१)
(३) (क−२ख+१) (क−२ख−१)
(४) (८+२य−३र) (८−२य+३र)
(५) (१०+३य+४र) (१०−३य−४र)
(६) (४क−५ख+ग) (४क−५ख−ग)
(७) (२ य+३ र+५ क+६ ख) (२ य+३ र−५ क−६ख)
(८) (क+ख−ग−१) (क−ख−ग+१)
(९) {य(क+ख)+र (क−ख)} {य(क−ख)−र(क+ख)}
(१०) (य+र) (य−र+२) (११) (य−ल) (य−ल−र)
(१२) (य−र)(य+र+२ल) (१३) (३य+२र−ल)(३य−२र+ल)
(१४) (य+र−ल) (य−र+ल) (१५) (य+र+ल) (य+र−ल)
(र+ल−य) (ल+य−र) ।

प्रश्नावली १७

(१) २पफ जोड़ें अथवा घटायें (२) ४रल जोड़ें अथवा घटायें
(३) २४रल जोड़े अथवा घटायें (४) २क^{२}ख^{२} जोड़ें अथवा घटायें
(५) र^{२} (६) ख^{२} (७) २५र^{२} (८) ९ख^{२} (९) ९र^{४}
(१०) ख^{४} (११) ८कख (१२) ४ (१३) ४०कख
(१४) १६र^{२} (१५) यर जोड़ें अथवा ३यर घटायें

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१६) ४क²ख² जोड़ें अथवा २० क²ख² घटायें
(१७) ९य²र² जोड़ें अथवा ३९य²र² घटायें
(१८) २२क² जोड़ें अथवा ३८क² घटायें
(१९) १०क जोड़ें अथवा २क अथवा ५ घटायें (२०) ३ जोड़ें ।

प्रश्नावली १८

(१) (य+३) (य+५) (२) (य+६) (य+१२)
(३) (य−२) (य−४) (४) (य−५) (य−९)
(५) (य+१) (य−११) (६) (य−८) (य+२)
(७) (क²+कख+ख²) (क²−कख+ख²)
(८) (क²+कख+२ख²) (क²−कख+२ख²)
(९) (२य²+५यर+र²) (२य²−५यर+र²)
(१०) (य²+५यर+३र²) (य²−५यर+३र²)
(११) (७य²+४यर−२र²) (७य²−४यर−२र²)
(१२) (३क²+२कख−५ख²) (३क²−२कख−५ख²)
(१३) (३क²+८क−२) (३क²−८क−२)
(१४) (५क²+७क−१) (५क²−७क−१)
(१५) (य²+७य+४) (य²−७य+४)
(१६) (३य²+५यर+४र²) (३य²+५यर+४र²)
(१७) (य²+२य+२) (य²−२य+२)
(१८) (२य²+६य+९) (२य²−६य+९)
(१९) (य²+४य+८) (य²−४य+८)
(२०) (९य²+१२यर+८र²) (९य²−१२यर+८र²)
(२१) (य⁴+२य²र+२र²) (य⁴−२य²र+२र²)
(२२) (२५क²+१०कख+२ख²) (२५क²−१०कख+२ख²)
(२३) ख²(२क²+६क+९) (२क²−६क+९)
(२४) य(य²+६य+१८) (य²−६य+१८) ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १९

(१) (य+२) (य+३)
(२) (य+७) (य+८)
(३) (य+८) (य+१०)
(४) (य+५) (य+८)
(५) (य−२) (य−६)
(६) (य−१) (य−१०)
(७) (य−५) (य−१०)
(८) (य+७) (य−२)
(९) (य+११) (य−३)
(१०) (य+१०) (य−३)
(११) (य+३) (य−८)
(१२) (य+१) (य−१३)
(१३) (क+१५ख) (क−५ख)
(१४) (क+६ख)(क−१०ख)
(१५) (य+४रल) (य−७रल)
(१६) (७−य) (२+य)
(१७) (५−य) (४+य)
(१८) (८+य) (२−य)
(१९) (क+२१ख) (क−२२ख)
(२०) (क+१७ख)(क−१५ख)
(२१) (य−क) (य−ख)
(२२) (य−क) $\left(य-\frac{१}{क}\right)$

प्रश्नावली २०

(१) (य+२) (३य+४)
(२) (य+२) (५य+६)
(३) (२य−७) (४य−१)
(४) (४य−३)(७य−५)
(५) (४य−३) (५य−७)
(६) (य+६) (५य−२)
(७) (२य+७) (९य−५)
(८) (२य+५)(३य−४)
(९) (३य+२) (४य−३)
(१०) ३(क−१)(५क+३)
(११) (५+२क) (५−४क)
(१२) (३+क) (१−५क)
(१३) (४+३क)(१−क)
(१४) (१+य) (८−७य)
(१५) (२य+७र)(१५य−४र)
(१६) (य+क) (य−ख)
(१७) (य−क)$\left(य-\frac{१}{क}\right)$
(१८) (य+ख)$\left(य+\frac{१}{ख}\right)$
(१९) (य+क) $\left(य-\frac{१}{क}\right)$
(२०) (य−ख)$\left(य+\frac{१}{ख}\right)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली २१

(१) $(य^2-८)(य+३)(य-३)$ (२) $(य^2+११)(य+४)(य-४)$
(३) $(५य^2-६र^2)(६य^2+७र^2)$ (४) $(२य^2+७र^2)(१५य^2-४र^2)$
(५) $(१८य^3+३५)(य+१)(य^2-य+१)$
(६) $(य^3-४र^3)(य^3-६र^3)$ (७) $(य^4-५)(य^2-८)$
(८) $(२य^4-३)(२य^2+१)(२य^2-१)$
(९) $(२क+४ख-७)(३क+६ख+५)$ (१०) $(४य-र)(७र-४य)$
(११) $(२क+३ख+८)(४क-५ख-६)$
(१२) $(य-र+१)(य-र+२)$ (१३) $(य-२र+२)(य-२र-४)$

(१४) $\left(य-\frac{१}{य}+३\right)\left(य-\frac{१}{य}-१\right)$

(१५) $\left(य+\frac{१}{य}-३\right)\left(य+\frac{१}{य}-४\right)$

(१६) $(क-ख-२ग)(क-३ख+२ग)$
(१७) $(य+र)(य-र+१)$
(१८) $(य+र+ल)(य-र-५ल)$
(१९) $(य+र-ल)(य-र+२ल)$
(२०) $(य+र+७यर)(७य+७र-यर)$
(२१) $(य+क+ख)(य+क-ख)$ ।

प्रश्नावली २२

(१) $(२य+३)(४य^2-६य+९)$
(२) $(५य+२र)(२५य^2-१०यर+४र^2)$
(३) $(४य+१)(१६य^2-४य+१)$
(४) $(३य+४र)(९य^2-१२यर+१६र^2)$
(५) $(य+२)(य^2+य+१)$
(६) $य(य^2-३यर+३र^2)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(७) $(४य+३र-१)\ (४य^२+६यर+९र^२-२य+३र+१)$
(८) $(२य+१)\ (य^२+य+७)$

(९) $\left(\frac{य}{र}+\frac{र}{य}\right)\left(\frac{य^२}{र^२}-१+\frac{र^२}{य^२}\right)$

(१०) $\left(य+\frac{१}{य}\right)\left(य^२-१+\frac{१}{य^२}\right)$

(११) $(५क-ख)\ (७क^२-१०कख+१९ख^२)$
(१२) $(३य+९)\ (१२९य^२-६य+२१)$
(१३) $(य^३+र^३)\ (य^४-य^२र^२+र^४)$
(१४) $(य+र)\ (य^२-यर+र^२)\ (य^६-य^३र^३+र^६)$
(१५) $२कख(५क+३ख)(२५क^२-१५कख+९ख^२)$
(१६) $र(२य+३र)\ (४य^२-६यर+९र^२)$ ।

प्रश्नावली २३

(१) $(२य-र)\ (४य^२+२यर+र^२)$ (२) $(य-२)\ (य^२+२य+४)$
(३) $(य-१)\ (य^२+य+१)$ (४) $(३य-२र)(९य^२+६यर+४र^२)$
(५) $(५क-४ख)\ (२५क^२+२०कख+१६ख^२)$
(६) $८(५-२ख)\ (२५+१०ख+४ख^२)$
(७) $२(२य-र)\ (४य^२+२यर+र^२)$
(८) $यर^२(य+र)\ (य^२-यर+र^२)\ (य-र)\ (य^२+य+र^२)$
(९) $(य-र)\ (य^२+यर+र^२)\ (य^६+य^३र^३+र^६)$
(१०) $(य+र)\ (य-र)\ (य^२-यर+र^२)\ (य^२+यर+र^२)\ (य^२+र^२)$

$(य^४-य^२र^२+र^४)$ (११) $\left(य-\frac{१}{य}\right)\left(य^२+१+\frac{१}{य^२}\right)$

(१२) $\left(\frac{क}{ख}-\frac{ख}{क}\right)\left(\frac{क^२}{ख^२}+१+\frac{ख^२}{क^२}\right)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१३) $(य-२)(य^२-य+१)$
(१४) $(८-य)(य^२-४य+१६)$
(१५) $-२ख(३क^२+ख^२)$
(१६) $-(य+७र)(३७य^२+१४यर+१३र^२)$
(१७) $(य-२र)(य^२+२यर+४र^२-२)$
(१८) $(य-३)(य^२+३य+६)$
(१९) $(य-२)(य^२+८य+४)$।

प्रश्नावली २४

(१) $(२य+३र)(२य+३र-४)$
(२) $(य-र)^२(य^२+र^२)$
(३) $(य+र-ल)(य-र+ल+१)$
(४) $(३य+२र-ल)(३य-२र+ल-३)$
(५) $(य+१)(य^२+६य+१)$
(६) $(य-४र)(य^२+४यर+१६र^२-१)$
(७) $(य-३)(य^२+३य-३र+९)$
(८) $(य-र)(य^२+यर+र^२+२)$
(९) $(य+२र-२)(य-२र+४)$
(१०) $\{क(ग+घ)+ख(ग-घ)\}\{क(ग-घ)-ख(ग+घ)\}$
(११) $\{क(य+र)-ख(य-र)\}\{क(य-र)+ख(य+र)\}$
(१२) $(य+र)(५य+३र-४)$
(१३) $(३य-२र)(२य+३र+५)$
(१४) $(२य-३र)(२य+३र+४ल)$
(१५) $(क+१)(क-१)^१$
(१६) $(क^२+१)(क^२+क+३)$

प्रश्नावली २५ (विविध)

(१) $२य^२र^२ल^२(य-४रल-३ल)$
(२) $(य-र)(य^२-२यर+र^२-२य+२र+१)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(३) (क—२ख) ($य^२$+$र^२$+$ल^२$)
(४) कय+खर) (खय+कर)
(५) $\left(य^२+\frac{१}{य^२}\right)^२$ (६) (२य—२र—३$ल^२$)
(७) $य^२र$ (य+र) (य—र) ($य^२$—यर+$र^२$) ($य^२$+यर+$र^२$)
(८) (५य—र) (य—५र) (९) ८कख($क^२$+$ख^२$)
(१०) (३क+२ख—ग) (३क—२ख+ग+२)
(११) २$क^२$+२कख+३$ख^२$) (२$क^२$—२कख+३$ख^२$)
(१२) ($क^२$+४क+८) ($क^२$—४क+८)
(१३) (य—२०) (य—२८) (१४) (य+१) (य—२)
(१५) (२य—७) (३य+५) (१६) (य+१) (३य+१)
(१७) (२य+३र+८) (४य—५र—६)
(१८) (८+य) (२—य)
(१९) (य+३) ($य^२$+३य+३)
(२०) (य—३) ($य^२$+३य+६)
(२१) $य^२र^२$ (५य—३र) (२५$य^२$+१५यर+९$र^२$)
(२२) य($य^२$+३य+३)
(२३) ($य^२$+४$र^२$) (य+२र) (य—२र)
(२४) (२य—र) (४$य^२$+२यर+$र^२$)
(२५) (२य+र) (४$य^२$—२यर+$र^२$—१)
(२६) ($य^२$+य+१) ($य^२$—य+१)
(२७) ($य^२$+य—१) ($य^२$—य—१)
(२८) (३य+१) (३$य^२$+६य+७)
(२९) (य—र) ($य^२$+यर+$र^२$+य+र+१)
(३०) (य—अ) $\left(य-\frac{१}{अ}\right)$
(३१) (य—१) (य—२) (य—३) (य—४)
(३२) (य—क) (य+क+१)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(३३) $(य^2+२)(य^2-२)(य^2+२य+२)(य^2-२य+२)$
(३४) $(य-ल)(य+२र+ल)$

प्रश्नावली २६

(१) $(य^2+११य+३)(य^2+११य+३५)$
(२) $(क^2+१०क+१०)(क^2+१०क+३०)$
(३) $(क+२)(क-३)(क^2-क-८)$
(४) $(क-३)(२क+३)(२क^2-३क+७)$
(५) $(क+२)^2(क^2+४क-६)$
(६) $(२क^2+३क-१)(२क^2+३क-३६)$
(७) $(य+६)(य-२)(य^2+३य-१२)$
(८) $(य+१)(३य-२)(३य^2+३य-२)$
(९) $(य^2-४य+१२)(य^2-११य+१२)$

प्रश्नावली २७

(१) $(क+ख+ग)(क^2+ख^2+ग^2-कख-खग-गक)$
(२) $(क+ख-ग)(क^2+ख^2+ग^2-कख+खग+गक)$
(३) $(क-ख-ग)(क^2+ख^2+ग^2+कख-खग+गक)$
(४) $(क-ख+ग)(क^2+ख^2+ग^2+कख+खग-गक)$
(५) $(क+ख+१)(क^2+ख^2+१-कख-ख-क)$
(६) $(३क-२ख-ग)(९क^2+४ख^2+ग^2+६कख-२खग+३गक)$
(७) $(२क-३ख+१)(४क^2+९ख^2+१+६कख+३ख-२क)$
(८) $(क-ख+६)(क^2+ख^2+३६+कख+६ख-६क)$
(९) $-२(ख-ग)(३क^2+ख^2+ग^2-३कख+खग-३गक)$
(१०) $क(४क^2+१८क+२१)$

(११) $\left(क+\frac{१}{क}-१\right)\left(क^2+\frac{१}{क^2}+\ +\frac{१}{क}\right)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१२) $\left(\text{क}-\frac{१}{\text{क}}-२\right)\left(\text{क}^{२}+\frac{१}{\text{क}^{२}}+२\text{क}-\frac{२}{\text{क}}+५\right)$

(१३) —१८ (१४) ४ (१५) ±२८

प्रश्नावली २८

(१) ३(य—र) (र—ल) (ल—य)
(२) ३(य—२) (य—३) (५—२य)
(३) ३(य—२र) (२र—३ल) (३ल—य)
(४) ३य(य—३) (३—२य)
(५) ३(३य+५) (य+२) (२य+३)
(६) ३(य—२र) (२र—ल) (ल—य)

प्रश्नावली २९

(१) १० (२) —४ (३) —९
(४) —२५ (५) ३० (६) २
(७) $-१\frac{१}{२}$ (८) $\text{र}^{२}+\text{र}^{३}$ (९) शून्य
(१५) ९ (१६) १ (१७) क=३, ख=१०
(१८) प=६२, फ=—७८ (१९) ३

(२०) $\frac{\text{ख}-\text{न}}{\text{क}-\text{म}}$

प्रश्नावली ३०

(१) (य—१) (य—२) (य+५)
(२) (य—१) (य—२) (य+४)
(३) (य—१) $(\text{य}+३)^{२}$
(४) $(\text{य}+१)^{२}$ (य—६)
(५) $(\text{य}+१)^{२}$ (य—३)
(६) (य—२) $(\text{य}^{२}-८\text{य}+२०)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(७) $(य+२)\ य^२+८य+२८)$
(८) $(य+३)\ (य^२+२य+१०)$
(९) $(य+३)\ (य^२+२य+९)$
(१०) $(य-१)\ (य+२)^२$
(११) $(य-१)\ (य^२+य-५)$
(१२) $(य-१)\ (य\ \ २)\ (य+३)$
(१३) $(य-२)\ (य^२+२य-१४)$
(१४) $(य-१)\ (य-२)\ (२य+१)$
(१५) $(य-१)\ (य+१)\ (४य-१)$
(१६) $(य+१)\ (य-४)\ (२य+३)$
(१७) $(य+१)\ (४य^२-४य-५)$
(१८) $(य-१)\ (२य^२+२य-१)$
(१९) $(२य+१)\ (२य-१)\ (३य+१)$
(२०) $(२य+१)\ (२य^२-य+१)$
(२१) $(२य-१)\ (२य^२+२य+१)$
(२२) $(य+१)\ (य-१)\ (य^२-३य-८)$
(२३) $(य-१)^२\ (२य^२-३य-४)$

प्रश्नावली ३१

(१) $-(य-र)\ (र-ल)\ (ल-य)$
(२) $(य-र)\ (र-ल)\ (ल-य)$
(३) $(य-र)\ (र-ल)\ (ल-य)\ (य+र+ल)$
(४) $-(य-र)\ (र-ल)\ (ल-य)\ (यर+रल+लय)$
(५) $-(य-र)\ (र-ल)\ (ल-य)\ (य+र+ल)$
(६) $(य+र)\ (र+ल)\ (ल+य)$
(७) $(य+र)\ (र+ल)\ (ल+य)$
(८) $(य+र)\ (र+ल)\ (ल+य)$
(९) $(य+र+ल)\ (यर+रल+लय)$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१०) (य+र+ल) (यर+रल+लय)
(११) (य+र+ल) (यर+रल+लय)

प्रश्नावली ३२

(१) $य^{१}$ (२) यर (३) $य^{२}र^{२}$
(४) $ल^{२}$ (५) यरल (६) $५क^{२}ख^{२}$
(७) $१३य^{२}र^{२}ल^{२}$ (८) $६य^{१}र^{१}ल^{२}$ (९) $७क^{०}ख^{१}ल^{१}$
(१०) $२१क^{१}ख^{१}ग^{४}$

प्रश्नावली ३३

(१) य+र (२) $२यर^{२}$
(३) ७(य−५) (४) य+र
(५) य−२ (६) य+१
(७) २य−३र (८) ३य−१
(९) ८($य^{२}$+यर+$र^{२}$) (१०) य+२र
(११) य($य^{२}$+य+१) (१२) य−र+ल
(१३) य(य+५) (१४) २य+१
(१५) ३य+१ (१६) ($य^{२}$−$र^{२}$)
(१७) य+१ (१८) य−१
(१९) य−२ (२०) य+२

प्रश्नावली ३४

(१) य−२ (२) २य−१
(३) क−२ (४) य+२
(५) $य^{२}$−३य+२ (६) $य^{२}$−१
(७) य+२ (८) य−१
(९) य−१ (१०) $य^{२}$−२य+१
(११) $य^{२}$−३य+४ (१२) य+१
(१३) $२य^{२}$ (२य+७) (१४) $३य^{२}$−२यर+$र^{२}$
(१५) य (३य+२)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ३५

(१) $य+४$ (२) $य-१$ (३) $य-२$
(४) $३य-५र$ (५) $य^{२}-२य-३$

प्रश्नावली ३६

(१) -१ (२) २ (३) $प=-२, फ=-४$
(५) $य-२$ (६) $य^{२}-२य+१$
(७) $प=म$ अथवा $य=फ$ (८) $य=१$

प्रश्नावली ३७

(१) $य^{२}र^{२}$ (२) $य^{३}र^{४}ल^{४}$
(३) $६०क^{४}ख^{३}ग^{४}$ (४) $१२०क^{५}ख^{६}ग^{८}ल^{३}$
(५) $१२०य^{५}र^{३}ल^{५}$ (६) $३००य^{८}र^{३}क^{४}ल^{२}$
(७) $(य+र)^{३}$ (८) $४य^{२}र(य-र)^{२}$
(९) $(य+१)(य-२)^{२}(य+३)^{२}$
(१०) $(अ+ब)(ब+स)(स+अ)$
(११) $(य-र)(य+र)^{२}$
(१२) $यर(य-र)(य+र)(य+२र)$
(१३) $६य(य-३)(य-४)(य+१)$
(१४) $(य-१)(य+१)(य+३)(य-२)$
(१५) $(य+२)(य^{२}-१)^{२}$ (१६) $(य+१)^{२}(य^{३}+८)$
(१७) $य(२य-३)(३य-१)(२य+९)$
(१८) $य^{६}-१$ (१९) $१२०यर(य^{२}-र^{२})$
(२०) $य^{४}-१$ (२१) $क^{२}+१क-३$
(२२) $य^{६}-र^{६}$ (२३) $य^{४}-र^{४}$
(२४) $क^{३}ख(क+ख)^{३}(क^{४}+क^{२}ख^{२}+ख^{४})$
(२५) $(य-१)^{२}(य+१)^{२}(य^{२}+१)(य^{२}+य+१)$
(२६) $(य-र)^{२}(य+र)(य^{२}+यर+र^{२})$
(२७) $य^{६}-१$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(२८) $(य^2-३)^2\ (३य^2-१)\ (३य+१)\ (३य-१)$

(२९) $(य+र+ल)\ (य+र-ल)\ (य-र)$

(३०) $१२य^2र^2\ (य^4-र^4)$

प्रश्नावली ३८

(१) $२य^6+६य^5+१३य^4-४२य^3-१६२य^2-३८१य-२३४$

(२) $य^6+य^5-४य^4+५य^3-२७य+२७$

(३) $२य^5-२य^4+५य^3-५७य^2-१२य+९०$

(४) $२य^6-१३य^5+३२य^4-३९य^3+२५य^2-८य+१$

(५) $(य+१)\ (य+२)\ (य+५)\ (य-३)\ (य-४)$

(६) $(य-१)\ (य+६)\ (य+७)\ (य^2-३य+४)$

(७) $य^2+२य-३$

(८) $य^3-४य^2+य+६$

(९) $य^2+य-६$ और $य^2+२य-८$

प्रश्नावली ३९

(१) $\frac{२यर}{ल}$ (२) $\frac{३य}{५र}$ (३) $\frac{३ल}{४यर}$

(४) $\frac{य-र}{य+र}$ (५) $\frac{य-र}{य+२र}$ (६) $\frac{-य}{५र+य}$

(७) $\frac{य-२}{य+५}$ (८) $\frac{य-र}{य+र}$ (९) $\frac{१}{य+र-ल}$

(१०) $\frac{य-र-ल}{य+र-ल}$ (११) $य^2+२र^2-२यर$

(१२) $\frac{१-४य}{१-५य}$ (१३) $\frac{य^3}{य+र}$

(१४) $य-१$ (१५) $\frac{य+१}{य-३}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ४०

(१) २ (२) $\frac{२य^२}{५र^३}$ (३) $\frac{यरक}{४}$

(४) $\frac{य-५}{य-३}$ (५) $\frac{य(य^२+र)}{द(य+र)}$

(६) $\frac{र^२-ल^२+२यल}{(य+र+ल)(य-र-ल)}$ (७) $\frac{क+ख+ग}{ग}$

(८) $\frac{ख}{क}$ (९) $\frac{य-र}{क+ख}$ (१०) $\frac{य+र}{य-र}$

(११) $\frac{(क-२)(क-५)}{(क+२)(क+४)}$ (१२) १ (१३) १

(१४) १ (१५) $\frac{(य+१)(य^२-१२य+८०)}{(य-१)(य-८)(य-१०)}$

प्रश्नावली ४१

(१) $\frac{१६य}{१५}$ (२) $\frac{१७}{३०क}$ (३) $\frac{क^२+ख^२+ग^२}{कखग}$

(४) $\frac{२(क-ख)}{कख}$ (५) ० (६) $\frac{२य^३+३य^२-१}{४य^३}$

(७) $\frac{२यर}{य^२+र^२}$ (८) ० (९) $\frac{३}{(य-१)(य-३)}$

(१०) $\frac{२}{(य-१)(य-२)}$ (११) $\frac{३य^२-१४}{(य-१)(य-२)(य-३)}$

(१२) २ (१३) $\frac{२य^3}{य^२-र^२}$ (१४) $\frac{४क^२}{क^४-ख^४}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१५) $\frac{२}{य+३}$ (१६) $\frac{८य^{७}}{य^{८}+२५६र^{८}}$ (१७) $\frac{१}{य^{८}-१}$

(१८) $\frac{६(य^{२}-२)}{(य^{२}-१)(य^{२}-४)}$ (१९) $\frac{२यर}{र^{२}-य^{२}}$ (२०) १

प्रश्नावली ४२

(१) $\frac{ख+क}{ख-क}$ (२) $\frac{क}{ख}$ (३) १

(४) $\frac{२कय}{क^{२}+य^{२}}$ (५) $\frac{२य}{य^{२}+१}$ (६) १

(७) १ (८) $\frac{४-३य}{५-३य}$ (९) २

(१०) $\frac{२क}{१-क^{२}}$

प्रश्नावली ४३

(१) ० (२) ० (३) ० (४) ०

(५) १ (६) $\frac{१}{कखग}$ (७) ० (८) ०

(९) १ (१०) १ (११) ० (१२) ४

प्रश्नावली ४४

(१) समीकरण (२) सर्वसमिका (३) सर्वसमिका

(४) समीकरण (५) सर्वसमिका (६) ८

(७) —३ (८) —२ (९) ३

(१०) ५ (११) क (१२) ७

(१३) ४ (१४) —२ (१५) ३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१६) २ (१७) १ (१८) १

(१९) ३ $\frac{१}{२}$ (२०) $-\frac{४}{१३}$ (२१) -१६

(२२) २ (२३) क (२४) $-\frac{३}{१६}$

(२५) १ (२६) $८\frac{१}{३}$ (२७) शून्य

(२८) ६ (२९) ३ (३०) २

प्रश्नावली ४५

(१) $२\frac{२}{३}$ (२) १८ (३) १२ (४) $१\frac{२}{७}$

(५) ९ (६) -१२ (७) $\frac{१}{९}$ (८) १३

(९) १४ (१०) $४\frac{१०}{११}$ (११) $४\frac{१२}{१८}$ (१२) $२\frac{७}{९}$

(१३) $-\frac{२}{३}$ (१४) $१\frac{८२}{८८९}$ (१५) $३\frac{३}{४१}$ (१६) $३\frac{३}{१८}$

(१७) १० (१८) १३ (१९) ५ (२०) ५

(२१) -१ (२२) $१०\frac{२}{३}$ (२३) १ (२४) $१\frac{१}{७}$

(२५) ३० (२६) ८ (२७) $१\frac{७}{३२}$ (२८) -६

(२९) $-\frac{३}{५}$ (३०) $४\frac{१}{२}$ (३१) $४\frac{१}{४}$

प्रश्नावली ४६

(१) ३ (२) ९ (३) -४ (४) $-३\frac{१}{२}$

(५) $-३\frac{४}{८}$ (६) ३ (७) -१०९ (८) $-४\frac{३}{७}$

(९) $१\frac{१}{२}$ (१०) $१\frac{१}{३}$ (११) $\frac{१३}{२२}$ (१२) ७

(१३) १ (१४) $\frac{४}{८}$ (१५) $-२\frac{१}{२}$ (१६) -५

(१७) $-३\frac{१}{२}$ (१८) $\frac{१९}{७}$ (१९) ३ (२०) -२

(२१) $-३\frac{१}{३}$

प्रश्नावली ४७

(१) $२\frac{२१}{३१}$ (२) १ (३) -१ (४) $-\frac{२०}{१९९}$

(५) ४ (६) -२ (७) ५ (८) -१

(९) $\frac{१}{८}$ (१०) $२\frac{३}{८}$ (११) $४\frac{१५}{१९}$ (१२) $१\frac{१}{२}$

(१३) $-१\frac{३}{८}$ (१४) $३\frac{१}{२}$ (१५) ६ (१६) -४

(१७) ७ (१८) १ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ४८

(१) $-५\frac{६}{७}$ (२) $-२\frac{१}{३}$ (३) $-४\frac{३}{७}$ (४) $-१\frac{२}{८}$
(५) -१७ (६) $७\frac{२}{३}$ (७) २ (८) -३ (९) $\frac{१}{४}$

प्रश्नावली ४९

(१) ५ (२) $\frac{२९}{२७४}$ (३) २० (४) १० (५) ०·६९
(६) ५ (७) १३·५ (८) ८ (९) १० (१०) $\frac{७}{३६}$ (११) ५

प्रश्नावली ५०

(१) क+ख (२) क+ख (३) शून्य (४) $\frac{२४क}{११}$

(५) क+ख (६) $\frac{ग^२+२कख}{क+ख}$ (७) $\frac{१}{कख}$ (८) शून्य

(९) $-\frac{२कख}{क+ख}$ (१०) $\frac{कख}{क+ख}$ (११) प+ब+म
(१२) क+ख+ग

प्रश्नावली ५१

(१) ४ (२) २० (३) ४८ और ३५ (४) २ (५) १२
(६) १५०००, १००००० रु० (७) १५० रु० (८) २० मीटर
(९) १५०० (१०) ३९ (११) ३६ (१२) २७
(१३) ४८ (१४) ७८ (१५) $\frac{१०}{१३}$ (१६) $\frac{३}{४}$
(१७) $\frac{४}{७}$ (१८) $\frac{१३}{१६}$।

प्रश्नावली ५२

(१) ४५ वर्ष, १५ वर्ष (२) सुरेन्द्र की आयु=३२ वर्ष, नरेन्द्र की आयु=१० वर्ष (३) रमेश=७० वर्ष, सतीश=४० वर्ष, (४) ७० वर्ष, ४० वर्ष (५) छोटा भाई=२ वर्ष, बड़ा भाई=७ वर्ष, पिता=५४ वर्ष (६) छोटा भाई=१५ वर्ष, बड़ा भाई=१७ वर्ष, पिता=४६ वर्ष (७) ३६ वर्ष (८) लड़का=१२ वर्ष, मनुष्य=४२ वर्ष (९) सोहन=१८ वर्ष, रमेश=४२ वर्ष।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५३

(१) रमेश=११० रु०, सोहन=१०० रु०, मोहन=११५ रु०
(२) नरेन्द्र=१४ रु०, सुरेन्द्र=३६ रु०
(३) बेंच = १६ रु०, कुर्सी = २४ रु०, मेज = ६० रु०
(४) रुपये के सिक्के=४०, ५० पैसे के सिक्के=८०, २५ पैसे के सिक्के =१६० (५) रुपये = १६, ५० पैसे=४८, २५ पैसे=८०
(६) १२ (७) ४ (८) ५०, ४० (९) मोहन के पास = १००० रु०, सोहन के पास=५०० रु० (१०) ७५ (११) ८०० रु०
(१२) २०० रु० (१३) १०४ (१४) १४
(१५) आदमी = ३० और लड़के = १०
(१६) चाय=४ रु० प्रति किलोग्राम, चीनी = २ रु० प्रति किलोग्राम
(१७) एक घोड़ा=६०० रु०, दूसरा घोड़ा=४०० रु० (१८) ५५० रु०
(१९) १ रु० के १८ के भाव वाले=९६, १ रु० के १५ भाव वाले=७०
(२०) २४

प्रश्नावली ५४

(१) ३६ किलोमीटर (२) ३६ किलोमीटर
(३) गाड़ी की लम्बाई=४० मीटर (४) $\frac{७}{४८}$ किलोमीटर
(५) १८$\frac{३}{४}$ किलोमीटर
(६) ३४ घंटे पश्चात् और क से ८५ किलोमीटर दूर
(७) स्थान क से ५$\frac{९}{२}$ किमी
(८) मोटरकार=६४ किमी प्रति घंटा, बस = ६० किमी प्रति घंटा
(९) ३ किमी प्रति घंटा (१०) १८ किमी

प्रश्नावली ५५

(१) २० मीटर (२) ३० मीटर (३) ११३$\frac{१}{३}$ मीटर, ८५ मीटर
(४) पहला = १२, दूसरा = २०, तीसरा = ४, चौथा = ६४
(५) पहला = २५, दूसरा = १२, तीसरा = १३५, चौथा = १५
(६) ४० किलोग्राम (७) ९२४ (८) २२६४ (९) १९००
(१०) ८० (११) ४५० ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५६

(१) $(च^2+छ^2)\ र = छज$ (२) $ख^2 = क^2\ (ख-र)$

(३) $क^2 = ख(ल+क)$ (४) $पख - कल + क^2 = ०$

(५) $२य^2 + क^2 - २कय = ख^2$ (६) $ख^2(य-ख)^2 = ल$

(७) $फ^2(य-ल) = क(य-र)^2 + खफ(य-र)$

(८) $कफ + पख = ०$ (९) $प^७ फ^४ = क^2 ख^2 ल^४$

(१०) $य - यल = १$

(११) $प^2 = \left(\frac{म}{य} + \frac{फ}{ल} - क\right)\left(मय + फल\right)$

प्रश्नावली ५७

(१) $म^2 = न^2 + ४$ (२) $प^2 ख^2 - फ^2 क^2 = ४क^2 ख^2$

(३) $ख^2 - क^2 = ४क^2 ख^2$ (४) $म^2 = न + २$

(५) $प^2 + ३प = फ$ (६) $ख^४ = प^४ + ४प^2$

(७) $प^2 - फ^2 = १$ (८) $४क^2 = ४ख^2 + १$

(९) $य^2 - र^2 = १$ (१०) $म^2 - न^2 = ४$

(११) $क^2 - ख^2 = ४पफ$ (१२) $क^2 - ख^2 = ८$

(१३) $\frac{(क+ख)^2}{४९} = \frac{(क-ख)^2}{९} + ४$

(१४) $(प+फ)^2 + १०० = २५\ (प-फ)^2$

(१५) $प^2(खम + गफ) = (खफ + गम)फम$

प्रश्नावली ५८

(१) $य = ८,\ र = २$ (२) $य = १,\ र = १$ (३) $य = १,\ र = -३$

(४) $य = -७,\ र = -३$ (५) $य = \frac{४}{३},\ र = \frac{५}{३}$ (६) $य = १,\ र = ३$

(७) $य = ६,\ र = ३$ (८) $य = १,\ र = २$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५९

(१) य=३, र=२ (२) य=३, र=० (३) य=—२, र=—१
(४) य=४, र=६ (५) य—$\frac{३}{१०}$ र=$६\frac{२}{१८}$ (६) य=$\frac{११}{७}$, र=—$१\frac{३}{७}$
(७) य=३, र=७ (८) य=$१\frac{१}{३}$, र=$१\frac{२}{३}$

प्रश्नावली ६०

(१) य=५, र=२ (२) य=१, र=२ (३) य=—२, र=६ (४) य=२०, र=१० (५) य=—$\frac{३}{२३}$, र=—$६\frac{७}{२३}$ (६) य=१०, र=३ (७) य=५, र=६ (८) य=—७, र=५

प्रश्नावली ६१

(१) य=३, र=१२ (२) य=$\frac{१}{२}$, र—$\frac{१}{३}$ (३) य=६, र=४
(४) य=५, र=२ (५) य=३, र=—४ (६) य=१५, र=१०
(७) य=२, र=३ (८) य=४, र=४

प्रश्नावली ६२

(१) य=१, र=—१ (२) य=$\frac{१९}{२३}$, र=$\frac{२४}{२३}$ (३) य=६, र=८
(४) य=११, र=१३ (५) य=—$१\frac{१६}{६८}$, र=$\frac{१८}{६८}$
(६) य=२, र=३ (७) य=१२, र=१५
(८) य=$१३\frac{१२}{१३}$, र=—$८\frac{७३}{६१}$ (९) य=७, र=४९
(१०) य=$३\frac{३७}{४८}$, र=$४\frac{७}{४८}$ (११) य=५, र=३
(१२) य=३, र=४ (१३) य=५, र=६
(१४) य=$४\frac{४}{२८}$, र=१२ (१५) य=३, र=४

प्रश्नावली ६३

(१) य=$\frac{१}{८}$, र=$\frac{१}{३}$ (२) य=$\frac{१}{४}$, र=$\frac{१}{८}$ (३) य=$\frac{१}{१२}$, र=$\frac{१}{१४}$
(४) य=—७, र=५ (५) य=$\frac{२}{३}$, र=$\frac{१}{२}$ (६) य=$\frac{१}{१८}$, र=$\frac{१}{१८}$
(७) य=$\frac{१}{४}$, र=२ (८) य=$\frac{१}{४}$, र=—४ (९) य=$\frac{१}{४}$, र=$\frac{१}{३}$
(१०) य=—$\frac{३}{८}$, र=$\frac{१}{८}$ (११) य=१०, र=५ (१२) य=१, र=$\frac{१}{४}$
(१३) य=$\frac{१}{७}$, र=—$\frac{१}{२}$ (१४) य=२, र=$\frac{२}{३}$ (१५) य=$\frac{१}{६}$, र=$\frac{१}{३}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ६४

(१) य=३, र=१ (२) य=२, र=१
(३) य=२, र=१ (४) य=−५, र=३
(५) य=२, र=३ (६) य=−१, र=१
(७) य=४, र=३ (८) य=३, र=५

प्रश्नावली ६५

(१) $य = \frac{ग^2 + पख}{ग + ख^2}$, $र = \frac{खग - प}{ख^2 + ग}$

(२) $य = \frac{४ग - ब}{क}$, $र = \frac{ब - ३ग}{ख}$

(३) $य = \frac{५क + ३ख}{४}$, $र = \frac{५क - ३ख}{४}$

(४) य=क, र=प

(५) य=३क, र=२ख

(६) $य = \frac{प(म + न)}{२}$, $र = \frac{क(न - म)}{२}$

(७) $य = \frac{२}{क + ख}$, $र = \frac{२}{क - ख}$

(८) $य = \frac{२क}{म + प}$, $र = \frac{२ख}{म - प}$

प्रश्नावली ६६

(१) य=२, र=३, ल=५ (२) य=२, र=३, ल=४
(३) य=२, र=३, ल=७ (४) य=२, र=३, ल=४
(५) य=१, र=−२, ल=३ (६) य=१, र=०, ल=−१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ६७

(१) य=२, र=३, ल=−६ (२) य=२, र=५, ल=४
(३) य=५, र=९, ल=८ (४) य=१०, र=११, ल=१२
(५) य=३, र=४, ल=५ (६) य=±२, र=±३
ल=±४

प्रश्नावली ६८

(१) य=५, र=७, ल=८ (२) य=१०, र=८, ल=१२
(३) य=३, र=५, ल=७ (४) य=२, र=८, ल=−४
(५) य=४, र=१, ल=५ (६) य=३, र=४, ल=५

(७) य=१, र=$\frac{१}{२}$, ल=$\frac{१}{३}$ (८) य=२, र=३, ल=४

(९) य=$\frac{१}{३}$, र=$\frac{१}{४}$, ल=$\frac{१}{५}$ (१०) य=१, र=−$\frac{१}{३}$, ल=१

(११) य=$\frac{१}{७}$, र=$\frac{१}{१०}$, ल=$\frac{१}{८}$ (१२) य=२, र=−३, ल=१

(१३) य=१, र=$\frac{१}{२}$, ल=$\frac{१}{३}$ (१४) य=१, र=$\frac{१}{२}$, ल=$\frac{१}{३}$

(१५) य=$\frac{२४}{७}$, र=−८, ल=$\frac{२४}{५}$

(१६) य=$\frac{१}{४}$, र=$\frac{१}{५}$, ल=$\frac{१}{७}$

(१७) य=$\frac{१२}{७}$, र=$\frac{१२}{५}$, ल=−१२

(१८) य=$\frac{१}{४}$, र=$\frac{१}{५}$, ल=$\frac{१}{६}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१९) य $= \pm \frac{१}{२}$, र $= \pm २$, ल $= \pm ८$

(२०) य $= \frac{कग}{ख}$, र $= \frac{कख}{ग}$, ल $= \frac{खग}{क}$

(२१) य $= \pm १$, र $= \pm ४$, ल $= \pm ३$
(२२) य $= \pm २$, र $= \pm ३$, ल $= \pm ४$
(२३) य $= ५$, र $= ७$, ल $= ९$
(२४) य $= १, -३$; र $= ०, -४$; ल $= -१, -५$
(२५) य $= \pm १$, र $= \pm ३$, ल $= \pm २$
(२६) य $= +८$, र $= +४$, ल $= +२$
(२७) य $= ३$, र $= ५$, ल $= ७$

प्रश्नावली ६९

(१) ८०, १५ (२) ३५, १९ (३) १३, २५, ३२ (४) १७, २३
(५) २०, १८ (६) १०, १५, ३८ (७) रमेश $= ३४$, सुरेश $= ६२$
(८) ५, ८, १२ (९) २४ (१०) ३६ (११) ४८ (१२) ५७
(१३) २३४ (१४) ५४३ (१५) ४८३

(१६) $\frac{२}{३}$ (१७) $\frac{७}{१३}$ (१८) $\frac{५}{१७}$

प्रश्नावली ७०

(१) पिता $= ५०$ वर्ष, पुत्र $= १४$ वर्ष
(२) राजेन्द्र $= ७५$ वर्ष, रमेश $= १५$ वर्ष
(३) सुरेश $= ७०$ वर्ष, महेश $= ५०$ वर्ष
(४) सुरेन्द्र $= २२$ वर्ष, राजेन्द्र $= १६$ वर्ष
(५) पिता $= ४८$ वर्ष, पुत्र $= २४$ वर्ष
(६) पुरुष $= ५०$ वर्ष, स्त्री $= ४०$ वर्ष, पुत्र $= १५$ वर्ष

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ७१

(१) कुर्सी=१५ रु०, मेज=२० रु० (२) बैल=५०० रु०, गाय=२५० रु० (३) घोड़ा=४०० रु०, गाड़ी=९६० रु० (४) दरी=५०० रु०, कालीन=३०० रु० (५) ३% ब्याज पर=७०० रु०, ४% ब्याज पर=३०० रु० (६) मेज=४० रु०, कुर्सी=१५ रु० (७) विद्यार्थी=३०, लड्डू=१६५ (८) मेजें=१२, घन=२४० रु० (९) क=८०० रु०, ख=१५०० रु०, ग=५०० रु० (१०) सुरेश=७५ रु०, नरेश=३० रु०, महेश=४५ रु० (११) पहला भाग=६०० रु०, दूसरा भाग=४०० रु०।

प्रश्नावली ७२

(१) लम्बाई=८ मीटर, चौड़ाई=५ मीटर (२) लम्बाई=२० मीटर, चौड़ाई=१६ मीटर (३) लम्बाई=४८ मीटर, चौड़ाई=१४ मीटर (४) लम्बाई=८ मीटर, चौड़ाई=६ मीटर (५) मनुष्य ४८ दिन और लड़का ७२ दिन में (६) १ आदमी का ६ रु० और १ लड़के का ४ रु० (७) सुरेन्द्र ३० दिन में, महेन्द्र २० दिन में, नरेन्द्र ६० दिन में (८) नरेन्द्र १५ दिन और महेन्द्र ३० दिन में।

प्रश्नावली ७३

(१) नाव की चाल=९$\frac{१}{२}$ किलोमीटर प्रति घंटा, नदी की चाल=३$\frac{१}{२}$ किलोमीटर प्रति घंटा (२) नाव की चाल=किलोमीटर प्रति घंटा, नदी की चाल=२ किलोमीटर प्रति घंटा (३) नाव की चाल=६ किलोमीटर प्रति घंटा, नदी की चाल=२ किलोमीटर प्रति घंटा (४) नदी की चाल=२ किलोमीटर प्रति घंटा (५) गाड़ी की चाल=२४ किलोमीटर प्रति घंटा, यात्रा की लम्बाई=९६ किलोमीटर (६) क और ख के बीच की दूरी=२०० किलोमीटर, गाड़ी की चाल=३३$\frac{१}{३}$ किलोमीटर (७) गाड़ी की चाल=३० किलोमीटर प्रति घंटा, यात्रा की लम्बाई=१२० किलोमीटर (८) गाड़ी की चाल=३० किलोमीटर प्रति घंटा, दूरी=७२० किलोमीटर (९) ५० किलोमीटर व ४० किलोमीटर प्रति घंटा (१०) ४५ किलोमीटर (११) ६० किलोमीटर।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ७४

(१) ± ५ (२) ± ११ (३) ± ५ (४) ± ७ (५) ± ३ (६) $\pm क$ (७) $८-२$ (८) $-५, १$ (९) ± ५ (१०) ± २ (११) ± १० (१२) ± २ (१३) ± ६ (१४) ± ५ (१५) ± ४ (१६) ± २ (१७) ± ४ (१८) $\pm \sqrt{\frac{१}{२}}$ (१९) ± ५ (२०) ± ७ (२१) $\sqrt{१\frac{३}{२}}$ इस प्रश्न में $य^२+१$ के स्थान पर $य^२-१$ होना चाहिए।

प्रश्नावली ७५

(१) $०, २$ (२) $२, ३$ (३) $०, ७$ (४) -१ (५) $\frac{१}{२}, -\frac{२}{३}$ (६) $१, -२$ (७) $-२, -३$ (८) $\frac{१}{२}, \frac{३}{२}$ (९) $\frac{१}{२}, -१$ (१०) $४, -१$ (११) $२, -७$ (१२) $\frac{३}{२}, -२$ (१३) $\frac{३}{४}क, -\frac{६}{३}क$ (१४) १ (१५) $\frac{१}{२}, -\frac{१}{८}$ (१६) $प, \frac{१}{प}$ (१७) $३, ५$ (१८) $२क, ख$ (१९) $फ, \frac{प^२}{फ}$ (२०) $३, -४$ (२१) $३, १$, इस प्रश्न में $२य-१$ के स्थान पर $२य+१$ होना चाहिये। (२२) $(क+ख), \left(\frac{क+ख}{२}\right)$।

प्रश्नावली ७६

(१) $१\pm\sqrt{५}$ (२) $३\pm२\sqrt{६}$ (३) $\frac{-५\pm\sqrt{१३}}{६}$

(४) $\frac{१\pm\sqrt{४१}}{४}$ (५) $\frac{५\pm\sqrt{३८५}}{१२}$ (६) $\frac{-२\pm\sqrt{७}}{२}$

(७) $\frac{१०\pm\sqrt{३}}{५}$ (९) $\frac{५९\pm\sqrt{३६१}}{१३}$ (१०) $२९, -१०$

(११) $१, -४$।

प्रश्नावली ७७

(१) $\frac{-५\pm\sqrt{९७}}{२}$ (२) $\frac{-३\pm\sqrt{१०९}}{५}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(३) $\frac{५ \pm \sqrt{४८८५}}{९०}$ (४) $\frac{१}{२}, -\frac{३}{४}$

(५) $\frac{-३ \pm ३\sqrt{७}}{३}$ (६) ३, $७\frac{४}{५}$ (७) $\frac{४}{५}$ (८) $\frac{९}{८}$ (९) $\frac{१३}{८}$

(१०) $-५\frac{४}{७}$ (११) −२, १ (१२) $\frac{५}{२}$, ५ (१३) ±८ (१४) ०, ४

(१५) ०, $\frac{४}{३}$।

प्रश्नावली ७८

(१) य=५, ४; र=४, ५ (२) य=५, −३; र=३, −५

(३) य=७, −४; र=−४, ७ (४) य=२, ४; र=३, $\frac{३}{२}$

(५) य=३, २; र=२, ३ (६) य=५, र=३ (७) य=७, र=४

(८) य=७, −४; र=४, −७ (९) य=±४, ±३;
र=±३, ±४ (१०) य=±४, र=±३

(११) य=±४, र=±२ (१२) य=±६, र=±५

(१३) य=±१, र=±१ (१४) य=$\frac{१}{८}$, र=$\frac{१}{३}$

(१५) य=३. र=२।

प्रश्नावली ७९

(१) ५, ६ (२) १०, −२ (३) ±१२·५३

(४) −६, ३६; ५, २५ (५) ५, −$\frac{१}{८}$ (६) १९, २१; −१९, −२१ (७) ३०, ३२; −३०, −३२ (८) १६ (९) ३९

(१०) ७३।

प्रश्नावली ८०

(१) $\frac{७}{१२}$ इस प्रश्न में कम के स्थान पर अधिक होना चाहिये।

(२) $\frac{८}{१७}$ (३) $\frac{३}{४}, \frac{४}{८}$ (४) $\frac{३}{२}, \frac{२}{३}$ (५) ६५ वर्ष, ३५ वर्ष

(६) पिता=३५ वर्ष, पुत्र=७ वर्ष (७) १४ तथा ३ वर्ष

प्रश्नावली ८१

(१) लम्बाई=४५ मीटर, चौड़ाई=३६ मीटर

(२) लम्बाई=२० मीटर, चौड़ाई=१२ मीटर

(३) लम्बाई=४८ मीटर, चौड़ाई=१४ मीटर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(४) लम्बाई=८० मीटर, चौड़ाई=६० मीटर
(५) लम्बाई=१४ मीटर, चौड़ाई=१० मीटर, ऊँचाई=१२ मीटर
(६) लम्बाई=३५ मीटर, चौड़ाई=२० मीटर
(७) ५० रु० (८) ८० रु० (९) १५ भेड़ें (१०) ५ रु०
(११) १० मनुष्य (१२) ४० भेड़ें।

प्रश्नावली ८२

(१) क=२० दिन, ख=३० दिन (२) क=६० दिन, ख=४० दिन
(३) बड़ा नल=७ घंटे, छोटा नल=८ घंटे
(४) पुरुष=२४ दिन और स्त्री=३० दिन में (५) २० आदमी
(६) ६ किलोमीटर प्रति घंटा (७) २ किलोमीटर प्रति घंटा
(८) २५ किलोमीटर प्रति घंटा (९) १५ व १८ मिनट
(१०) ८ मीटर प्रति सेकन्ड (११) ७ किलोमीटर प्रति घंटा।

प्रश्नावली ८३

(२) र-अक्ष, र-अक्ष, य-अक्ष, य-अक्ष, पहला, दूसरा, तीसरा, चौथा, मूलबिन्दु (३) (—५, ५) (४) ३, ६
(५) —१६, —४।

प्रश्नावली ८४

(१९) —५

प्रश्नावली ८५

(१) ७, ५ (२) ७, —५ (३) १०, १३ (४) ९, ११
(५) १, २ (६) ८, ६ (७) ३, —२ (८) ९, ८
(९) (१, ३) (३, २) (२, १) (१०) (४, ५)

प्रश्नावली ८६

(१) लघु$_2$ ६४=६ (२) लघु$_3$ २४३=५ (३) लघु$_6$ २१६=३
(४) लघु$_{10}$ १२५=३ (५) $२^५$=३२ (६) $७^३$=३४३
(७) $५^४$=६२५ (८) $क^न$=ष (९) $ख^म$=य (१०) ७।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ८७

(१) ८ (२) ६ (३) ६ (४) ६ (५) २ लघु ३+२ लघु ५
(६) १+लघु २−२ लघु ३ (७) लघु ७+२ लघु ३+४ लघु २
(८) २ लघु ३+२ लघु ५−२ लघु २ (९) −२० लघु ३
(१०) $\frac{3}{5}$ लघु २−$\frac{2}{5}$ लघु ५−$\frac{3}{2}$ लघु ३
(११) ४ लघु ३−लघु ५−९ लघु २
(१२) ४ लघु २−२ लघु ५−$\frac{3}{2}$ लघु ३+लघु ७

(१७) $\frac{\text{लघु ख}}{\text{लघु ख}-\text{लघु क}}$

(१८) $\frac{\text{२ लघु क}-\text{५ लघु ख}}{\text{लघु क}-\text{लघु ख}}$ (१९) $\frac{\text{८ लघु क}-\text{लघु ख}}{\text{२ लघु क}-\text{लघु ख}}$

(२०) $\frac{-\text{४ लघु ३}}{\text{लघु २}+\text{लघु ३}-\text{लघु ७}}$ (२१) $\frac{\text{७ लघु ३}+\text{४ लघु २}}{\text{लघु २}+\text{३ लघु ३}-\text{२ लघु ७}}$

प्रश्नावली ८८

(१) शून्य (२) १ (३) ३ (४) $\bar{1}$ (५) $\bar{2}$ (६) शून्य (७) $\bar{3}$ (८) २
(९) ३·९५२४ (१०) $\bar{1}$·९५२४ (११) $\bar{3}$·९५२४ (१२) ५·९५२४
(१३) ६९·७४ (१४) ६·९७४ (१५) ·६९७४ (१६) ६९७४०० (१७)
·००६९७४ (१८) १·४९८३ (१९) १·९८३३ (२०) $\bar{1}$·५२३१३
(२१) $\bar{1}$·९७०८९ (२२) $\bar{3}$·४५६४ (२३) ११ (२४) १२ (२५) ९
(२६) $\bar{4}$·५४७९ (२७) $\bar{1}$·४३२२ (२८) $\bar{2}$·६७२८ (२९) $\bar{4}$·५४८०५
(३०) ४६४६ (३१) १४·६५८८ ।

प्रश्नावली ८९

(१) २·५४६ (२) ·२९१७ (३) ४२५९ (४) ·३६०४ (५) १६·३६
(६) ३·३४८ (७) ·०६९७४ (८) १९१५६३·१ (९) १७८·१४१५१६
(१०) ९·०८० (११) २८७४ रु० (१२) १२५१ (१३) २२·५ वर्ष
लगभग (१४) ७५५ रु० ४० पैसे (१५) ६२०९ रु० (१६)
२०७५०० (१७) १४·९ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय १८

घातांक-सिद्धान्त

१. परिभाषाएँ—

किसी संख्या को उसी से बार-बार गुणा करने की क्रिया को घात क्रिया (invalution) कहते हैं। संख्या क को उसी से म बार गुणा करके गुणनफल $क^{म}$ से प्रकट किया जाता है, अर्थात्

$$क^{म} = क \times क \times क \times \cdots\cdots \text{ म खण्डों तक।}$$

$क^{म}$ को 'क घात म' पढ़ते हैं, क आधार (base) आधार कहलाता है और म घातांक अथवा केवल घात (index or power)।

२. सिद्ध करो कि

$$क^{म} \times क^{न} = क^{म+न}$$

परिभाषा से $क^{म} \times क^{न}$

$$= (क \times क \times क \times \cdots \text{म बार}) \times (क \times क \times क \times \cdots \text{न बार})$$

$$= क \times क \times क \times \cdots (म+न) \text{ बार}$$

$$= क^{म+न}$$

इसी प्रकार

$$क^{म} \times क^{न} \times क^{प} = (क^{म} \times क^{न}) \times क^{प}$$

$$= क^{म+न} \times क^{प} = क^{(म+न)+प}$$

$$= क^{म+न+प}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः व्यापक रूप से,

$$क^{य} \times क^{न} \times क^{प} \times \cdots\cdots = क^{म+न+प+\cdots}$$

अतएव एक ही राशि के कितने भी घातों के गुणनफल का घातांक सब गुणनखण्डों के घातांकों के योगफल के बराबर होता है।

उदाहरणार्थ $क^{३} \times ख^{४} = क^{७}$ और $क^{१०} \times क^{८} \times क^{६} = क^{२४}$

३. सिद्ध करो कि

$$क^{म} \div क^{न} = क^{म-न}$$

$$\because \; क^{म} = क \times क \times क \times \cdots\cdots \text{म बार}$$

$$\text{और } क^{न} = क \times क \times क \times \cdots\cdots \text{न बार}$$

$$क^{म} \div क^{न} = \frac{क \times क \times क \times \cdots\cdots \text{म बार}}{क \times क \times क \times \cdots\cdots \text{न बार}}$$

यदि म > न, तो हर अंश के न खण्डों से कट जायगा और अंश में इस प्रकार (म—न) खण्ड रह जायेंगे

अतः $$क^{म} \div क^{न} = क^{म-न}$$

और यदि न > म, तो अंश हर के म खण्डों से कट जायगा और इस प्रकार हर में (न—म) गुणनखण्ड रह जायेंगे।

अतः $$क^{म} = क^{न} = \frac{१}{क^{न-म}}$$

४. सिद्ध करो कि

$$(क^{म})^{न} = क^{मन}$$

हम जानते हैं कि

$$क^{म} = क \times क \times क \times \ldots \text{म खण्डों तक}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore (क^{म})^{न} = (क \times क \times क \times \ldots म$ खण्डों तक$)^{न}$

$= (क \times क \times क \times \ldots म$ खण्डों तक$) \times$

$(क \times क \times क \times \ldots म$ खण्डों तक$) \times$

...ऐसे न समूहों तक

$= क \times क \times क \times \ldots (म \times न)$ खण्डों तक

$= क \times क \times क \times \ldots (म \times न)$ खण्डों तक

$= क^{मन}$

उप-साध्य : सिद्ध करो कि

$$(क^{म})^{न} = (क^{न})^{म}$$

क्योंकि प्रत्येक $क^{मन}$ के बराबर है।

५. सिद्ध करो कि

$$(क\,ख)^{म} = क^{म}\,ख^{म}$$

$(कख)^{म} = कख \times कख \times कख \times \ldots म$ बार

$= (क \times क \times क \times \ldots म$ बार$) \times (ख \times ख \times ख \times \ldots म$ बार$)$

$= क^{म}\,ख^{म}$

इसी प्रकार $\left(\frac{क}{ख}\right)^{म} = \frac{क^{म}}{ख^{म}}$

६. सिद्ध करो कि $क^{0} = १$

$\therefore क^{म} \times क^{न} = क^{म+न}$ म और न के प्रत्येक मान के लिए सत्य है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ म के स्थान पर ० (शून्य) रखने पर

$$\text{क}^{0} \times \text{क}^{\text{न}} = \text{क}^{0+\text{न}} = \text{क}^{\text{न}}$$

$$\therefore \quad \text{क}^{0} = \frac{\text{क}^{\text{न}}}{\text{क}^{\text{न}}} = १$$

अतः शून्य व्यास वाली हर राशि (शून्य को छोड़कर) एक के बराबर होती है।

७. सिद्ध करो कि $\text{क}^{\frac{१}{\text{न}}}$, क का नवाँ मूल प्रगट करता है।

हम जानते हैं कि $\text{क}^{\frac{१}{२}} + \text{क}^{\frac{१}{२}} = \text{क}^{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}} = \text{क}$

∴ $\text{क}^{\frac{१}{२}}$ एक ऐसी राशि है जिसको यदि उसी से गुणा किया जाय तो फल क आता है अर्थात् $\text{क}^{\frac{१}{२}}$, क के वर्गमूल के बराबर है।

$$\therefore \quad \text{क}^{\frac{१}{२}} = \sqrt{\text{क}}$$

इसी प्रकार $\text{क}^{\frac{१}{३}} \times \text{क}^{\frac{१}{३}} \times \text{क}^{\frac{१}{३}} = \text{क}^{\frac{१}{३}+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}} = \text{क}$

$$\therefore \quad \text{क}^{\frac{१}{२}} = \sqrt[१]{\text{क}}$$

अतः प्रत्यक्ष है कि $\text{क}^{\frac{१}{\text{न}}} \times \text{क}^{\frac{१}{\text{न}}} \times \text{क}^{\frac{१}{\text{न}}} \times \ldots$ न खण्ड तक

$$= \text{क}^{\frac{१}{\text{न}}+\frac{१}{\text{न}}+\frac{१}{\text{न}}+\ldots}$$ न खण्डों तक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \left(\text{क}^{\frac{१}{न}} \right)^{न} = \text{क}$$

$$\therefore \text{क}^{\frac{१}{न}} = \sqrt[न]{\text{क}}$$

उप-साध्य $\left(\text{क}^{\frac{१}{न}} \right)^{न} = \text{क}^{\frac{म}{न}} \times \text{क}^{\frac{म}{न}} \times \text{क}^{\frac{म}{न}} \times \ldots$ न खण्डों तक

$$= \text{क}^{\left(\frac{म}{न}\right) \times न} = \text{क}^{म}$$

$$\therefore \quad \text{क}^{\frac{क}{न}} = \sqrt[न]{\text{क}^{म}}$$

अतः $\text{क}^{\frac{म}{न}}$, $\text{क}^{म}$ का नवाँ मूल है

पुनः $\text{क}^{\frac{१}{न}} \times \text{क}^{\frac{१}{न}} \times \text{क}^{\frac{१}{न}} \times \ldots$ म बार

$$= \text{क}^{\frac{१}{न} \times \frac{१}{न} \times \frac{१}{न} \times \ldots \text{म बार}}$$

$$= \text{क}^{\frac{म}{न}} = \left(\sqrt[न]{\text{क}} \right)^{म}$$

अर्थात् $\text{क}^{\frac{म}{न}}$ को $\text{क}^{\frac{१}{न}}$ का म का घात समझा जा सकता है अथवा $\text{क}^{म}$ का नवाँ मूल

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः यदि किसी राशि का घातांक भिन्नात्मक हो, तो अंश उसका घात तथा हर उसका मूल बतलाता है।

८. सिद्ध करो कि $क^{-न}$, $क^{न}$ का व्युत्क्रम प्रगट करता है।

हम जानते हैं कि $क^{म} \times क^{न} = क^{म+न}$, म और न के प्रत्येक मान के लिए सही है।

म के स्थान पर—न रखने पर

$$क^{-न} \times क^{न} = क^{न+न} = क^{०} = १$$

अतः $$क^{-न} = \frac{१}{क^{न}}$$

उदाहरण १. $८^{\frac{२}{३}}$ का मान बताओ।

$$(८)^{\frac{२}{३}} = (२^{३})^{\frac{२}{३}} = २^{३ \times \frac{२}{३}}$$

$$= २^{२} = ४$$

उदाहरण २. $१६^{-\frac{३}{४}} = (२^{४})^{-\frac{३}{४}} = २^{४(-\frac{३}{४})}$

$$= २^{-३} = \frac{१}{२^{३}} = \frac{१}{८}$$

उदाहरण ३. सरल करो—

$$\left(\frac{क^{म}}{क^{न}}\right)^{म+न} \times \left(\frac{क^{न}}{क^{ल}}\right)^{न+ल} \times \left(\frac{क^{ल}}{क^{म}}\right)$$

अब $$\left(\frac{क^{म}}{क^{न}}\right)^{म+न} \times \left(\frac{क^{न}}{क^{ल}}\right)^{न+ल} \times \left(\frac{क^{ल}}{क^{म}}\right)^{ल+म}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=\left(\text{क}^{\text{म}-\text{न}}\right)^{\text{म}+\text{ल}}\times\left(\text{क}^{\text{न}-\text{ल}}\right)^{\text{न}+\text{ल}}\times\left(\text{क}^{\text{ल}-\text{म}}\right)^{\text{ल}+\text{म}}$$

$$=\text{क}^{(\text{म}-\text{न})(\text{म}+\text{न})}\,\text{क}^{(\text{न}-\text{ल})(\text{न}+\text{ल})}\times\text{क}^{(\text{ल}-\text{म})(\text{ल}+\text{म})}$$

$$=\text{क}^{\text{म}^{२}-\text{न}^{२}}\times\text{क}^{\text{न}^{२}-\text{ल}^{२}}\times\text{क}^{\text{ल}^{२}-\text{म}^{२}}$$

$$=\text{क}^{\text{म}^{२}-\text{न}^{२}+\text{न}^{२}-\text{ल}^{२}+\text{ल}^{२}-\text{म}^{२}}\,\text{क}^{०}=१$$

उदाहरण ४. सरल करो—

$$\frac{\left(\text{प}+\frac{१}{\text{फ}}\right)^{\text{म}}\cdot\left(\text{प}-\frac{१}{\text{फ}}\right)^{\text{न}}}{\left(\text{फ}+\frac{१}{\text{फ}}\right)^{\text{म}}\cdot\left(\text{फ}-\frac{१}{\text{प}}\right)^{\text{न}}}$$

$$\text{व्यंजक}=\frac{\left(\frac{\text{प फ}+१}{\text{फ}}\right)^{\text{म}}\left(\frac{\text{पफ}-१}{\text{फ}}\right)^{\text{न}}}{\left(\frac{\text{पफ}+१}{\text{प}}\right)^{\text{म}}\left(\frac{\text{पफ}-१}{\text{प}}\right)^{\text{न}}}$$

$$=\frac{\frac{(\text{पफ}+१)^{\text{म}}}{\text{फ}^{\text{म}}}\;\frac{(\text{पफ}-१)^{\text{न}}}{\text{फ}^{\text{न}}}}{\frac{(\text{पफ}+१)^{\text{म}}}{\text{प}^{\text{म}}}\;\frac{(\text{पफ}-१)^{\text{न}}}{\text{प}^{\text{न}}}}$$

$$=\frac{(\text{पफ}+१)^{\text{म}}}{\text{फ}^{\text{म}}}\cdot\frac{\text{प}^{\text{म}}}{(\text{पफ}+१)^{\text{म}}}\cdot\frac{(\text{पफ}-१)^{\text{न}}}{\text{फ}^{\text{न}}}\cdot\frac{\text{प}^{\text{न}}}{(\text{पफ}-१)^{\text{न}}}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{प^{म} \cdot प^{न}}{फ^{म} \cdot फ^{न}} = \frac{प^{म+न}}{फ^{म+न}}$$

$$= \left(\frac{प}{फ}\right)^{म+न}$$

उदाहरण ५. यदि $क^{य} = ख$, $ख^{र} = ग$ और $ग^{ल} = क$ हो, तो सिद्ध करो कि यरल = १

$\therefore$ $क^{य} = ख$

$\therefore$ $(क^{य})^{र} = ख^{र} = ग$ (ज्ञात है)

$\therefore$ $क^{र} = ग$

$\therefore$ $(क^{यर})^{ल} = ग^{ल} = क$ (ज्ञात है)

अर्थात् $क^{यरल} = क^{१}$

अतः यरल = १

उदाहरण ६. सिद्ध करो—

$$\frac{१}{१+क^{म-न}+फ^{म-प}} + \frac{१}{१+क^{न-म}+क^{न-प}} + \frac{१}{१+क^{प-म}+क^{प-न}} = १$$

पहला पद $= \frac{१}{१+क^{म-प}+क^{ख-प}} = \frac{क^{-म}}{क^{म}(१+क^{म-न}+क^{म-प})}$

$=$ { अंश और हर को $क^{-म}$ से गुणा करने पर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. $६\sqrt{४९^{२}}$ ८. $३४३^{-\frac{२}{३}}$

९ $६२५^{-\frac{३}{४}}\ ६४^{-\frac{३}{६}}$

१०. निम्न को ३ के घात में प्रगट करो--

(अ) $९^{२}$ (आ) $८१^{४}$ (इ) $७२९^{\frac{४}{३}}$

सरल करो—

११. $\left(\frac{क^{य}}{क^{र}}\right)^{ल}\times\left(\frac{क^{र}}{क^{ल}}\right)^{म}\times\left(\frac{क^{ल}}{क^{म}}\right)^{र}$

१२. $\left(\frac{क^{य}}{क^{र}}\right)^{य^{२}+यर+र^{२}}\times\left(\frac{क^{र}}{क^{ल}}\right)^{र^{२}+रल+ल^{२}}$

$\times\left(\frac{क^{ल}}{क^{य}}\right)^{ल^{२}+लय+य^{२}}$

१३. $\dfrac{\left(प^{२}-\frac{१}{फ^{२}}\right)^{प}\left(प-\frac{१}{फ}\right)^{प-फ}}{\left(फ^{२}-\frac{१}{प^{२}}\right)^{फ}\cdot\left(फ+\frac{१}{प}\right)^{प-फ}}$

१४. $\dfrac{१}{१+य^{न-म}+य^{प-म}}+\dfrac{१}{१+य^{म-प}+य^{य-प}}$

$+\dfrac{१}{१+य^{म+प}+य^{न-प}}$

१५. $\dfrac{क+ख+ग}{क^{-१}ख^{-१}+ख^{-१}ग^{-१}+ग^{-१}क^{-१}}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \frac{\text{क}^{-\text{म}}}{\text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{ख}^{-\text{प}}}$$

इसी प्रकार दूसरा पद $= \dfrac{\text{क}^{-\text{न}}}{\text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{प}}}$ और

तीसरा पद $= \dfrac{\text{क}^{-\text{प}}}{\text{क}^{-\text{प}} + \text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}}}$

अतः $\dfrac{१}{१ + \text{क}^{\text{म}-\text{न}} + \text{क}^{\text{म}-\text{प}}} + \dfrac{१}{१ + \text{क}^{\text{न}-\text{प}} + \text{क}^{\text{न}-\text{प}}}$

$$+ \frac{१}{१ + \text{क}^{\text{प}-\text{म}} + \text{क}^{\text{प}-\text{न}}}$$

$$= \frac{\text{क}^{-\text{न}}}{\text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{प}}} + \frac{\text{क}^{-\text{न}}}{\text{ख}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{प}}}$$

$$+ \frac{\text{क}^{-\text{प}}}{\text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{प}}}$$

$$= \frac{\text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{प}}}{\text{क}^{-\text{म}} + \text{क}^{-\text{न}} + \text{क}^{-\text{प}}} = १$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित का मान बताओ :—

१. $१६^{\frac{५}{४}}$ २. $२५^{\frac{५}{२}}$ ३. $६४^{\frac{५}{६}}$

४. $८१^{-\frac{३}{४}}$ ५. $\left(\frac{१}{२७}\right)^{-\frac{४}{३}}$ ६. $(१२८)^{-\frac{२}{७}}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६. यदि $क^{य} = ख^{र}$ और $ख^{य} = क^{र}$ सिद्ध करो कि $क = \frac{१}{ख}$

१७. यदि $क = यर^{य-१}$, $ख = यर^{फ-१}$, $ग = यर^{ब-१}$, सिद्ध करो

कि $क^{फ-ब}\ ख^{ब-प}\ ग^{प-फ} = १$

१८. यदि $क^{य} = ख^{र} = ग^{ल}$ और $ख^{२} = कग$, सिद्ध करो कि

$\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = \frac{२}{र}$

१९. यदि $क^{य} = म$, $क^{र} = न$ और $क^{२} = \left(म^{र}\ न^{य}\right)^{ल}$ सिद्ध करो कि

$यरल = १$

२०. यदि $य = ३^{\frac{१}{३}} + ३^{\frac{१}{३}}$, सिद्ध करो कि

$३य^{३} - ९य + १० = ०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली

१. ३२ २. ३१२५ ३. $\frac{१}{३२}$ ४. $\frac{१}{२७}$

५. ७१ ६. $\frac{१}{४}$ ७. ७ ८. $\frac{२}{४९}$

९. $\frac{१}{१०००}$ १०. (अ) $३^{४}$ (आ) $३^{१६}$ (इ) $३^{८}$

११. १ १२. १ १३. $\left(\frac{प}{फ}\right)^{प+फ}$ १४. १

१५. कखग

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

त्रिकोणमिति

Trigonometry

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ९

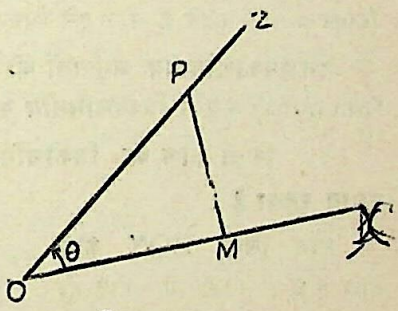
त्रिकोणमितीय अनुपात अथवा वृत्तीय फलन

(Trigonometrical Ratios or Circular Fuuction)

१. त्रिकोणमिति अँग्रेजी के शब्द Trigonometry से सम्बन्धित है। यह दो यूनानी शब्दों 'Trigonon' (जिसका अर्थ Triangle अथवा त्रिकोण अथवा त्रिभुज है) और 'Metron' (जिसका अर्थ है "I measure अथवा मैं नापता हूँ") से बना है। अतः त्रिकोणमिति त्रिभुज के नाप से सम्बन्ध रखती है। पहले यह त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के सम्बन्ध ही को प्रगट करती थी, किन्तु अब इसका विस्तार अधिक बढ़ गया है और गणित की सभी खोजों में इसका समावेश है। अतः गणित की उच्च शिक्षा के लिये इसका ज्ञान अत्यधिक आवश्यक है।

२. परिभाषाएँ—मान लिया कोई रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से चलकर O के परितः $\angle XOZ$ ($=\theta$) बनाती है और OZ इसकी स्थिति हो जाती है। OZ के किसी बिन्दु P से OX पर PM लंब डाला।

इस प्रकार POM समकोण त्रिभुज है, जिसमें कर्ण OP, लम्ब PM कोण θ की सम्मुख भुजा और आधार OM कोण θ की संलग्न भुजा है।



चित्र १·१

अनुपात $\frac{PM}{OP}$ अर्थात् $\frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$ को कोण θ की ज्या (sine) कहते हैं और इसे ज्या θ (sin θ) लिखते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अनुपात $\frac{OM}{OP}$ अर्थात् $\frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$ को कोण θ की कोटिज्या (cosine) कहते हैं और इसे कोज्या θ (cos θ लिखते हैं।

अनुपात $\frac{PM}{OM}$ अर्थात् $\frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}}$ को कोण θ की स्पर्शज्या (tangent) कहते हैं और इसे स्प θ (tan θ) लिखते हैं।

अनुपात $\frac{OM}{PM}$ अर्थात् $\frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$ को कोण θ की कोटिस्पर्शज्या (cotangent) कहते हैं और इसे कोस्प θ (cot θ) लिखते हैं।

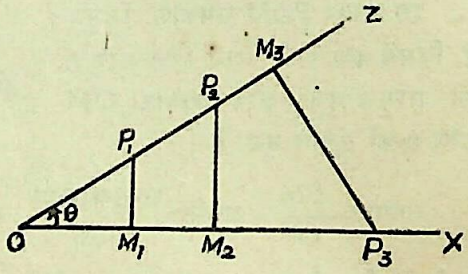
अनुपात $\frac{OP}{MO}$ अर्थात् $\frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$ को कोण θ की व्युत्क्रम-कोटिज्या (secant) कहते हैं और इसे व्युको θ (sec θ) लिखते हैं।

अनुपात $\frac{OP}{PM}$ अर्थात् $\frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$ को कोण θ की व्युत्क्रमज्या (cosecant) कहते हैं और इसे व्युज्या θ (cosec θ) लिखते हैं।

इन त्रिकोणमितीय अनुपातों को वृत्तीय फलन अथवा फंकशन (circular functions) अथवा त्रिकोणमितीय फलन कहते हैं।

३. किसी कोण का त्रिकोणमितीय अनुपात उस कोण के लिये सदा समान रहता है।

मान लिया ZOX कोई कोण θ है। OZ में कोई दो बिन्दु P_1 और P_2 लिये और उनसे OX पर P_1M_1 और P_2M_2 लंब डाले। OX पर कोई बिन्दु P_3 लिया और उससे OZ पर P_3M_3 लम्ब डाला।



चित्र १·२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

त्रिभुज P_1OM_1 में, $\sin\theta = \frac{P_1M_1}{OP_1}$

त्रिभुज P_2OM_2 में, $\sin\theta = \frac{P_2M_2}{OP_2}$

और त्रिभुज P_3OM_3 में, $\sin\theta = \frac{P_3M_3}{OP_3}$

किन्तु समकोण त्रिभुज P_1OM_1, P_2OM_2, और P_3OM_3 समान कोणिक (equiangular) हैं, अतः इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

$$\therefore \quad \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{P_2M_2}{OP_2} = \frac{P_3M_3}{OP_3}$$

इस प्रकार $\sin\theta$ चाहे हम $\triangle P_1OM_1$ लें, और चाहे $\triangle P_2OM_2$ अथवा $\triangle P_3OM_3$ में लें, प्रत्येक स्थिति में वही है।

इसी प्रकार अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के लिये भी यह सिद्ध किया जा सकता है।

अतः किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान उन त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाइयों पर निर्भर नहीं है जिनसे उनकी गणना होती है वरण वे केवल कोण के परिमाण पर निर्भर हैं। यदि कोण समान रहते हैं तो अनुपात भी समान रहते हैं।

उदाहरण १. समकोण त्रिभुज ABC की भुजायें AB और BC क्रमशः २० और २१ सेमी हैं। कोण A के वृत्तीय फलन (त्रिकोणमितीय अनुपात) ज्ञात करो।

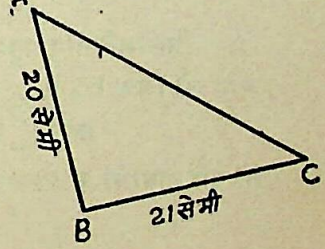
$\because \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore \quad AC^2 = (20)^2 + (21)^2$

अर्थात्, $AC^2 = 400 + 441 = 841$

$\therefore \quad AC = \sqrt{841} = 29$

$\therefore \quad AC = 29$ सेमी



चित्र १·३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

चित्र से स्पष्ट है, कि

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{29} \; ; \; \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{20}{29} \; ;$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{20} \; ; \; \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{21}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{29}{20} \; ; \; \operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{29}{21}$$

उदाहरण २. $\triangle ABC$ में $\angle C = 90°$, $AB = 10$ सेमी और $BC = 8$ सेमी तो $\sin B$ और शीर्ष C से कर्ण AB पर डाले गये लम्ब का मान बताओ।

शीर्ष C से AB पर लम्ब CP डाला गया।

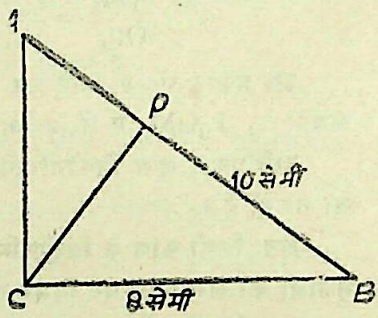
$\because AC^2 = AB^2 - BC^2$

$\therefore AC^2 = (10)^2 - (8)^2$

अर्थात्, $AC^2 = 100 - 64 = 36$

$\therefore AC = \sqrt{36} = 6$

$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.



चित्र १·४

$\triangle BCP$ में,

$$\frac{CP}{CB} = \sin B \; ; \; \therefore CP = CB \sin B$$

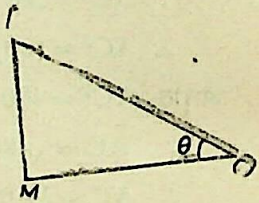
$$\therefore CP = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4{\cdot}8 \text{ सेमी।}$$

४. त्रिकोणमितीय अनुपातों के मूल सम्बन्ध—

मान लो चित्र 1·5 में $\angle O = \theta$

तथा $\angle M = 90°$

तो परिभाषाओं के आधार पर स्पष्ट है कि



चित्र १·५,

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) $\because \sin\theta . \operatorname{cosec}\theta = \frac{PM}{OP} . \frac{OP}{PM} = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(२) $\because \cos\theta . \sec\theta = \frac{OM}{OP} . \frac{OP}{OM} = 1$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ और $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(३) पुनः, $\because \tan\theta . \cot\theta = \frac{PM}{OM} . \frac{OM}{PM} = 1$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ और $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(४) $\because \sin\theta = \frac{PM}{OP}$ और $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{PM}{OP} . \frac{OP}{OM} = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$

अतः $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(५) $\because \sin\theta = \frac{PM}{OP}$ और $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$

$\therefore \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{OM}{OP} . \frac{OP}{PM} = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

(६) $\triangle$ OPM में,

$$\because PM^2 + OM^2 = OP^2 \quad \cdots\cdots(१)$$

OP^2 से भाग देने पर,

$$\because \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$

$$\left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1$$

अर्थात्, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore$ राशि $(\sin\theta)^2$ को सदैव $\sin^2\theta$ के रूप में लिखा जाता है तथा अन्य अनुपात भी इसी प्रकार लिखे जाते हैं।

उपप्रमेय—(i) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, और

(ii) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(७) पुनः समीकरण (१) को OM^2 से भाग देने पर,

$$\left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$$

अर्थात्, $(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$

अतः $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

उपप्रमेय—(i) $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

और (ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(८) इसी प्रकार समीकरण (१) के दोनों पक्षों को PM^2 से भाग देने पर,

$$\left(\frac{PM}{PM}\right)^2+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2=\left(\frac{OP}{PM}\right)^2$$

अर्थात्, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

उपप्रमेय—(i) $\operatorname{cosec}^2\theta-1=\cot^2\theta$

और (ii) $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

उदाहरण १. सिद्ध करो कि $\sin\theta.\sec\theta.\cot\theta=1$

$\sin\theta.\sec\theta.\cot\theta$

$$=\sin\theta.\frac{1}{\cos\theta}.\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1$$

उदाहरण २. सिद्ध करो कि $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta=1$

$(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta$

$$=\cos^2\theta\ \sec^2\theta=\cos^2\theta.\frac{1}{\cos^2\theta}=1$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$\sin^3\theta\cos\theta+\sin\theta.\cos^3\theta=\sin\theta.\cos\theta$

बायाँ पक्ष $=\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=\sin\theta.\cos\theta(1)=\sin\theta\cos\theta$

उदाहरण ४. सिद्ध करो कि

$(\tan\theta+\cot\theta)^2=\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta$

$(\tan\theta+\cot\theta)^2=\tan^2\theta+2\tan\theta.\cot\theta+\cot^2\theta$

$=\tan^2\theta+2+\cot^2\theta$

$=\tan^2\theta+1+1+\cot^2\theta$

$=\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १

१. यदि समकोण त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$, $AB = 5$ सेमी और $AC = 3$ सेमी, तो कोणों A और B के सब त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान बताओ।

२. यदि समकोण त्रिभुज DEF में $\angle E = 90°$, $DE = 12$ सेमी और $EF = 5$ सेमी तो कोणों D और F के सब त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करो।

३. यदि समकोण त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$, $\sin B = \frac{3}{5}$ और $AB = 15$ तो AC का मान बताओ।

४. कमरे की दीवार के सहारे एक सीढ़ी खड़ी है जो कमरे के फर्श से 60° का कोण बनाती है। यदि दीवार से सीढ़ी के नीचे वाले सिरे की दूरी 2 मीटर हो तो बताओ कि सीढ़ी दीवार को कितनी ऊँचाई पर स्पर्श करती है। ($\tan 60° = \sqrt{3}$)

सिद्ध करो कि

५. $\sin\theta \cot\theta = \cos\theta$

६. $\cos\theta . \tan\theta = \sin\theta$

७. $\operatorname{cosec}\theta . \tan\theta = \sec\theta$

८. $\sec\theta . \cot\theta = \operatorname{cosec}\theta$

९. $\cos\theta . \operatorname{cosec}\theta . \tan\theta = 1$

१०. $\operatorname{cosec}^2\theta \sin^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta \cos^2\theta = \cot^2\theta + 1$

११. $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = \cos^2\theta$

१२. $(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = 2\sin^2\theta - 1$

१३. $\cos^2 A (1 + \tan^2 A) = 1$

१४. $(1 - \cos^2\theta)\cot^2\theta = \cos^2\theta$

१५. $\sin^2\theta . (1 + \cot^2\theta) = 1$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

१७. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

१८. $(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\sin\theta=\cos^2\theta$

१९. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

२०. $\operatorname{cosec}^4\theta-\operatorname{cosec}^2\theta=\cot^2\theta+\cot^4\theta$

२१. $(1-\cos^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\tan^2\theta$

२२. $\sin^4\theta-\cos^4\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta=1-2\cos^2\theta$

२३. $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta.\operatorname{cosec}\theta$

२४. $\cos\theta+\sin\theta.\tan\theta=\sec\theta$

५. विविध उदाहरण—

उदाहरण १. सिद्ध करो कि

$$\tan^2 A-\tan^2 B=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A.\cos^2 B}$$

$$\tan^2 A-\tan^2 B=(\sec^2 A-1)-(\sec^2 B-1)$$

$$=\sec^2 A-\sec^2 B=\frac{1}{\cos^2 A}-\frac{1}{\cos^2 B}$$

$$=\frac{\cos^2 B-\cos^2 A}{\cos^2 A.\cos^2 B}$$

$$=\frac{(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A.\cos^2 B}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A.\cos^2 B}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. सिद्ध करो कि

$$\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$$

बायें पक्ष के अंश और हर को $\sqrt{1-\sin A}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}\times\frac{1-\sin A}{1-\sin A}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}=\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\sec A-\tan A$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\frac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$\because \quad \sec^2 A-\tan^2 A=1$

$\therefore \quad \tan A+\sec A-1$

$=\tan A+\sec A-(\sec^2 A-\tan^2 A)$

$=\tan A+\sec A-(\sec A+\tan A)\ (\sec A-\tan A)$

$=(\tan A+\sec A)\ (1-\sec A+\tan A)$

अर्थात् $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\tan A+\sec A$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ४. सिद्ध करो कि

$$\frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}=\cot A.\ \tan B$$

$$\frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}=\frac{\cot A+\tan}{\frac{1}{\tan B}+\frac{1\ B}{\cot A}}$$

$$=\frac{\cot A+\tan B}{\frac{\cot A+\tan B}{\tan B.\ \cot A}}$$

$$=(\cot A+\tan B).\ \frac{\tan B.\ \cot A}{\cot A+\tan B}$$

$$=\cot A.\ \tan B$$

प्रश्नावली २

सिद्ध करो कि

१. $(1+\sin\theta)\ (\sec\theta-\tan\theta)=\cos\theta$

२. $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\cos^2 A-\sin^2 A$

३. $\dfrac{\cos^2 A-\cos^2 B}{\cos^2 A\ \cos^2 B}=\tan^2 B-\tan^2 A$

४. $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}+\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=0$

५. (अ) $\sin\theta\ (1+\tan\theta)+\cos\theta\ (1+\cot\theta)=\sec\theta+\text{cosec}\ \theta$

(आ) $(\sec\theta+\text{cosec}\ \theta)\ (\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\ \text{cosec}\ \theta+2$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

६. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - 3 \sin^2 A \cos^2 A$

७. $\dfrac{1}{\sec A - \tan A} = \sec A + \tan A$

८. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

९. $\dfrac{1 - \cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{1 + \cos A}$

१०. $\sqrt{\dfrac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \sec \theta + \tan \theta$

११. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos \theta}{1 \quad \cos \theta}} = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$

१२. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

१३. $\dfrac{1}{\sec \theta + \tan \theta} - \dfrac{1}{\cos \theta} = \dfrac{1}{\cos \theta} - \dfrac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$

१४. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

१५. $\dfrac{\tan \theta}{\sec \theta - 1} - \dfrac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \dfrac{2}{\tan \theta}$

१६. $\dfrac{\tan A}{1 - \cot A} + \dfrac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

१७. $\dfrac{\cot \theta . \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta} - \dfrac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta . \cos \theta}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१८. $\frac{\tan A - \cot B}{\tan B - \cot A} = \tan A \cot B$

१९. यदि $a \cos \theta + b \sin \theta = p$ और $a \sin \theta - b \cos \theta = q$ तो सिद्ध करो कि $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$

२०. यदि $\tan A + \sin A = m$ और $\tan A - \sin A = n$, तो सिद्ध करो कि $m^2 - n^2 = 4\sqrt{(mn)}$

६. त्रिकोणमितीय अनुपातों की सीमाएँ—

हम जानते हैं कि $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\because$ $\sin^2 \theta$ और $\cos^2 \theta$ दोनों पूर्ण वर्ग है इसलिये ये दोनों धनात्मक हैं और इनका योगफल 1 है, अतः इनमें से कोई भी एक से अधिक नहीं हो सकता।

अतएव किसी कोण के ज्या (sine) अथवा कोटिज्या (cosine) एक से बड़ा नहीं हो सकता।

क्योंकि $\sin \theta$ अथवा $\cos \theta$ इकाई से बड़ा नहीं हो सकता, इसलिये व्युज्या θ (cosec θ) अथवा व्युको θ (sec θ) जो क्रमशः $\frac{1}{\sin \theta}$ अथवा $\frac{1}{\cos \theta}$ के बराबर हैं, इकाई से (संख्यात्मक मान में) कम नहीं हो सकते।

पुनः हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है। अतः परिभाषा से वे अनुपात जिनके हरों में कर्ण है कभी भी एक से बड़े नहीं हो सकते और जिनके अंश में कर्ण है कभी एक से छोटे नहीं हो सकते। अतः किसी कोण के ज्या तथा कोज्या कभी भी एक से बड़े नहीं हो सकते और व्युज्या तथा व्युको कभी एक से छोटे नहीं हो सकते। स्पर्शज्या (tangent) तथा कोटिस्पर्शज्या (cotangent) का मान कुछ भी हो सकता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात उसके किसी भी एक अनुपात के पदों में लिखे जा सकते हैं।

ऐसा करने की दो रीतियाँ हैं, (१) बिना चित्र बनाये और (२) चित्र बना कर। निम्न उदाहरणों में ऐसा करने की सरल रीतियाँ बतायी गयी हैं।

उदाहरण १. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोटिज्या के पदों में लिखो।

हम जानते हैं, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$$

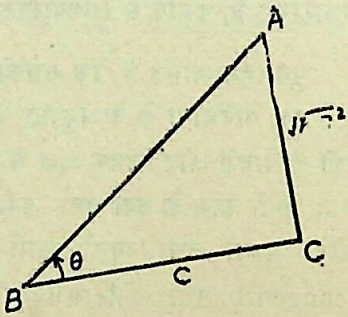
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

अथवा (चित्र द्वारा)

मान लिया $\cos\theta = C = \dfrac{C}{1}$

अब यदि हम एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना करें जिसकी आधार BC की लम्बाई C और कर्ण AB की लम्बाई एक हो, तो आधार का कोण चित्र में θ होगा।



चित्र १·६

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

लम्ब $(AC) = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1 - C^2}$

$$\sin\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{1-C^2}}{1} = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{\sqrt{1-C^2}}{C} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{1}{C} = \frac{1}{\cos\theta}$$

और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-C^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

उदाहरण २. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों की ज्या (sine) के पदों में लिखो।

$$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को स्पर्शज्या (tangent) के पदों में लिखो।

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)}}$$

$$= \frac{\tan\theta}{\sqrt{(\tan^2\theta+1)}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$$

और $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{(1+\cot^2\theta)}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

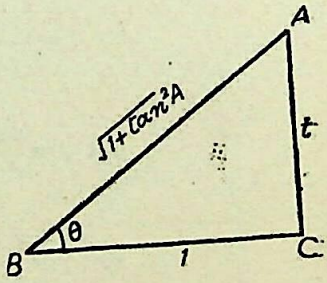
अथवा (चित्र द्वारा)

मान लिया $\tan\theta = t = \frac{t}{1}$

एक समकोण त्रिभुज बनाया जिसका लम्ब $AC = t$ और आधार $BC = 1$

$\therefore$ कर्ण $(AB) = \sqrt{BC^2+AC^2}$

$= \sqrt{1+t^2}$



चित्र १·७

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\cos\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{\sqrt{(1+t^2)}}{1} = \sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

उदाहरण ४. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोस्प (cot) के पदों में लिखो।

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\cot^2\theta}\right)}} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{(1+\cot^2\theta)}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{(1+\cot^2\theta)}}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{(1+\cot^2\theta)}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ५. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को व्युत्क्रम-कोज्या (secant) के पदों में लिखो।

$$\sin\theta=\sqrt{(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{\left[1-\frac{1}{\sec^2\theta}\right]}=\frac{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sec\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$$

उदाहरण ६. समस्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को व्युत्क्रम-ज्या (cosec) के पदों में लिखो।

$$\text{in}\ \theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\cos\theta=\sqrt{(1-\sin\theta)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\times\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\,\theta-1}}$$

$$\cot\,\theta=\sqrt{\text{cosec}^2\,\theta-1}$$

और $\sec\,\theta=\frac{1}{\cos\,\theta}=\frac{\text{cosec}\,\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2\,\theta-1}}$

उदाहरण ७. यदि $\sin\,\theta=\frac{4}{5}$, तो कोण θ के शेष अनुपातों के मान बताओ।

$$\cos^2\,\theta=1-\sin^2\,\theta=1-(\tfrac{4}{5})^2=1-\tfrac{16}{25}=\tfrac{9}{25}$$

$$\therefore\quad \cos\,\theta=\sqrt{\tfrac{9}{25}}=\tfrac{3}{5}$$

$$\tan\,\theta=\frac{\sin\,\theta}{\cos\,\theta}=\tfrac{4}{5}\times\tfrac{5}{3}=\tfrac{4}{3}$$

$$\cot\,\theta=\frac{1}{\tan\,\theta}=\tfrac{3}{4}$$

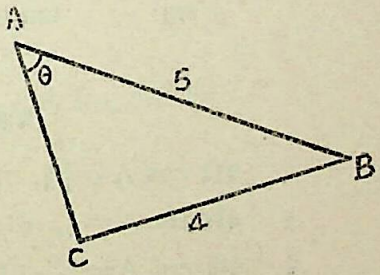
$$\sec\,\theta=\frac{1}{\cos\,\theta}=\tfrac{5}{3}$$

$$\text{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\,\theta}=\tfrac{5}{4}$$

अथवा (चित्र बनाकर)

एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना करें जिसमें एक भुजा $BC=4$ और कर्ण $AB=5$ हो। चित्र से स्पष्ट है कि $\angle A$ का मान θ है।

$$AC^2=AB^2-BC^2$$
$$=(5)^2-(4)^2$$
$$=25-16=9$$
$$\therefore\ AC=\sqrt{9}=3$$



चित्र १८

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore \cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}; \quad \cot\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}; \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{4}.$$

उदाहरण ८. यदि $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = C$, तो $\tan\theta$ का मान बताओ।

$$a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = C$$

दोनों पक्षों को $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{b\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{c}{\cos^2\theta}$$

अर्थात् $a\tan^2\theta + b = c\sec^2\theta$

अर्थात् $a\tan^2\theta + b = c(1 + \tan^2\theta)$

अर्थात् $a\tan^2\theta - c\tan^2\theta = c - b$

अर्थात् $(a - c)\tan^2\theta = c - b$

अर्थात् $$\tan^2\theta = \frac{c-b}{a-c}$$

अतः $$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{c-b}{a-c}}$$

प्रश्नावली ३

१. यदि $\cos A = \frac{12}{13}$, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो।

२. यदि $\sin A = \frac{4}{5}$, तो $\tan A$ और $\sec A$ का मान बताओ।

३. यदि $\cot A = \frac{20}{21}$, तो शेष अनुपात ज्ञात करो।

४. यदि $\operatorname{cosec} A = \frac{17}{15}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५. यदि $\tan\theta = \frac{2}{3}$, तो $\cos\theta$ का मान बताओ।

६. यदि $\cos A = \sin A$, तो $\operatorname{cosec} A$ का मान ज्ञात करो।

७. यदि $\cot A = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$, तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात करो।

८. यदि $\sin\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, तो $\cos\theta$ तथा $\tan\theta$ का मान ज्ञात करो।

९. यदि $\tan\theta = \frac{a}{b}$, तो $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ का मान ज्ञात करो।

[संकेत—अंश और हर को $\cos\theta$ से भाग देकर $\tan\theta$ का मान रख दो।

१०. यदि $\cot A = \frac{m}{n}$, तो $\frac{m\cos A - n\sin A}{m\cos A + n\sin A}$ का मान ज्ञात करो।

११. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ तथा $\cos B = \frac{15}{17}$, तो $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ का मान ज्ञात करो।

१२. यदि $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, तो सिद्ध करो कि

$$b\sin\theta = a\cos\theta$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय २

कुछ कोणों के वृत्तीय फलनों के मान

(Values of Circular functions of some angles)

प्रस्तावना—कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात दैनिक जीवन की समस्याओं के हल करने के लिए प्रयोग में आते रहते हैं। इस अध्याय में हम 45°, 30°, 60°, 0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ज्ञात करेंगे।

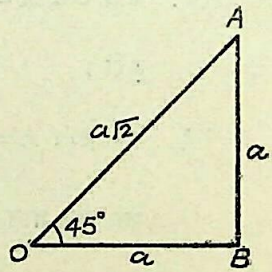
८. **कोण 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात**—मान लिया समकोण त्रिभुज AOB का कोण B समकोण है, कोण AOB का मान 45° है। अतः ∠OAB भी 45° का ही है।

$\therefore \quad AB = OB = a$ (मान लिया)

तो $OA^2 = AB^2 + OB^2 = a^2 + a^2$

$= 2a^2$

$\therefore \quad OA = a\sqrt{2}$



चित्र २·१

अतः $\sin 45° = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{a}{a} = 1$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\cot 45^\circ = \frac{OB}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{OA}{OB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45^\circ = \frac{OA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

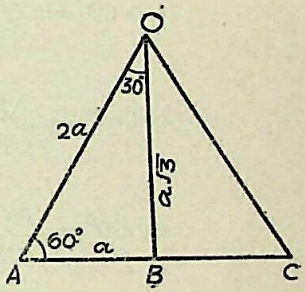
९. 30° और 60° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात—

मान लिया कि समबाहु त्रिभुज AOC है जिसकी प्रत्येक भुजा 2a है। AC पर लम्ब OB है।

$\therefore \angle OAB = 60^\circ, \angle AOB = 30^\circ$ और $AB = a$;

समकोण $\triangle AOB$ में,

$$OB = \sqrt{(OA^2 - AB^2)} = \sqrt{\{(2a)^2 - (a)^2\}} = \sqrt{(4a^2 - a^2)} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



चित्र २·२

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AO} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OB}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\sec 30^\circ = \frac{AO}{OB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{AO}{AB} = \frac{2a}{a} = 2 ;$$

पुनः, $\sin 60^\circ = \frac{OB}{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

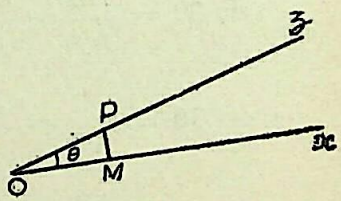
$$\tan 60^\circ = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{AO}{AB} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\text{cosec } 60^\circ = \frac{AO}{OB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

१०. **कोण 0° के त्रिकोणमितीय अनुपात**—मान लिया परिक्रामी रेखा OZ अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से चलकर एक बहुत ही छोटा कोण ZOX (=θ1) बनाती है। OZ के किसी बिन्दु P से OX पर PM लम्ब डाला।



चित्र २·३

जब कोण θ छोटा होगा तो PM की लम्बाई भी छोटी होगी। जैसे-जैसे कोण θ छोटा होता जायगा वैसे ही वैसे PM की लम्बाई भी उतनी ही कम होती जायगी। जब कोण θ बहुत ही छोटा होगा, तो PM की लम्बाई भी बहुत ही

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कम होगी और जब कोण θ शून्य हो जायगा, तो PM की लम्बाई भी शून्य हो जायगी। इस स्थिति में P बिन्दु M पर पड़ेगा और कर्ण OP आधार OM का संपाती होगा अर्थात् OP=OM.

अतः $\sin 0^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{शून्य}}{OP} 0$; $\cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$

$$\tan 0^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{शून्य}}{OM} = \text{शून्य}$$

$$\cot 0^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{OM}{\text{शून्य}} = \frac{\text{एक परिमित राशि}}{\text{शून्य}}$$

=एक परिमित राशि का शून्य से अनुपात

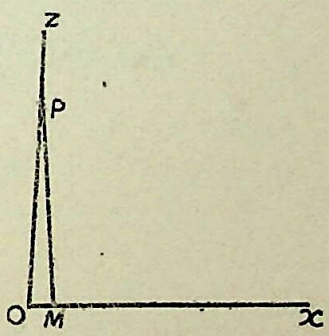
=अनन्तः (जिसकी कोई सीमा न हो)

$\therefore$ $\cot 0^\circ = \infty$ (अनन्ती बड़ी राशि का चिह्न)

$$\sec 0^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\text{cosec } 0^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{OP}{\text{शून्य}} = \infty$$

११. कोण 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात—मान लिया कोण ZOX एक समकोण के अत्यन्त समीप है किन्तु समकोण के बराबर नहीं है। परिक्रामी रेखा OZ के किसी बिन्दु P से OX पर PM लम्ब डाला।



चित्र २·४

अब कोण POM समकोण से कुछ ही छोटा है, P से OX पर डाले गये लम्ब PM का पाद M, O के बहुत समीप होगा अर्थात् OM की लम्बाई बहुत कम होगी। ज्यों-ज्यों कोण POM एक समकोण के समीप

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

होता जायगा, OM की लम्बाई भी त्यों-त्यों घटती जायगी और M बिन्दु O के निकट होता जायगा और जब परिक्रामी रेखा OZ, OX के साथ समकोण बनायेगी तो OM शून्य के बराबर हो जायगा। PM कर्ण OP के संपाती होगी। अतः

$$OP = PM \text{ और } OM = \text{शून्य}$$

अतः $\sin 90° = \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{PM} = 1$

$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{शून्य}}{OP} = \text{शून्य}$$

$$\tan 90° = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{\text{शून्य}} = \infty$$

$$\cot 90° = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{शून्य}}{PM} = \text{शून्य}$$

$$\sec 90° = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{\text{शून्य}} = \infty$$

$$\text{cosec } 90° = \frac{OP}{PM} = \frac{PM}{PM} = 1$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विशिष्ट कोणों के लिये त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी—

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\propto$
$\cot\theta$	$\propto$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\propto$
$\text{cosec}\,\theta$	$\propto$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

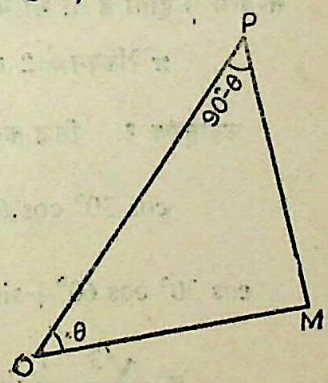
१३. पूरक कोणों (Complementary angles) के त्रिकोणमितीय अनुपात—मान लिया OPM एक त्रिभुज है जिसका कोण PMO समकोण है।

$\angle POM = \theta$,

$\therefore$ $\angle POM$ और $\angle OPM$ एक दूसरे के पूरक हैं।

अतः $OPM = 90° - \theta$

$$\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$



चित्र २·५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\cos\ (90^\circ-\theta)=\frac{PM}{OP}=\sin\ \theta$$

$$\tan\ (90^\circ-\theta)=\frac{OM}{PM}=\cot\ \theta$$

$$\cot\ (90^\circ-\theta)=\frac{PM}{OM}=\tan\ \theta$$

$$\sec\ (90^\circ-\theta)=\frac{OP}{PM}=\text{cosec}\ \theta$$

और $\text{cosec}\ (90^\circ-\theta)=\frac{OP}{OM}=\sec\ \theta$

टिप्पणी—रेडियन (Radian) कोण के वृत्तीय माप (Circular Measure) की इकाई है। इस पद्धति में कोण रेडियन के पदों में नापे जाते हैं। रेडियन वह कोण है जो किसी वृत्त के केन्द्र पर उसकी त्रिज्या के तुल्य चाप द्वारा बनता है। π पूर्व परिचित संख्या है। जब इसका प्रयोग कोणों के सम्बन्ध में होता है तो भी यह एक संख्या ९ है, और

π रेडियन $=2$ समकोण $=180^\circ$

उदाहरण १. सिद्ध करो कि

$$\cos 30^\circ \cos 60^\circ+\sin 30^\circ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 30^\circ \cos 60^\circ+\sin. 30^\circ \sin 60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{1+\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ}\right)^2=\frac{1+\sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ}$$

$$\text{बायां पक्ष}=\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{3+1-2\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{दाहिना पक्ष}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{अतः}\left(\frac{1+\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ}\right)^2=\frac{1+\sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\sin A \cos A \cot (90^\circ-A) \sec^2 (90^\circ-A)=1$$

$$\sin A.\ \cos A.\ \cot (90-A)\ \sec^2 (90^\circ-A)$$

$$=\sin A.\ \cos A.\ \tan A.\ \operatorname{cosec}^2 A$$

$$=\sin A.\ \cos A.\ \frac{\sin A}{\cos A}.\frac{1}{\sin^2 A}=1$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ४. सिद्ध करो कि

$$\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} . \tan \frac{\pi}{3}$$

बायाँ पक्ष $= (1)^2 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

दाहिना पक्ष $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\sqrt{3}$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{2.(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{4}$$

अतः $\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}$

प्रश्नावली ४

सिद्ध करो कि

१. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$

२. $3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 30^\circ = \sin 90^\circ$

३. $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$

४. $\sin 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

५. $\cos 60^\circ = \frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

६. $\tan 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. $\cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \text{co} \frac{\pi}{2}$

८. $3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4}$

$+ \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0$

९. $\sin A \cos A \cot^2 (90° - A) \sec^2 (90° - A) \cot A = 1$

१०. $\operatorname{cosec}^2 (90° - A) = 1 + \cos^2 (90° - A) \cdot \sec^2 A$

११. $\sin A \cos (90° - A) + \cos A \sin (90° - A) = 1$

१२. त्रिभुज ABC में $\angle C$ समकोण है, सिद्ध करो कि
$\tan A + \tan B = C^2/ab$

१३. सिद्ध करो किसी त्रिभुज ABC में

(1) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ (2) $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$

(3) $\tan \frac{C+A}{2} = \cot \frac{B}{2}$

१४. सिद्ध करो कि
$\sin^2 30° : \sin^2 45° : \sin^2 60° : \sin 90° = 1 : 2 : 3 : 4$

१५. $\operatorname{cosec}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 (90° - \theta) = \operatorname{cosec}^2 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 (90° - \theta)$

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

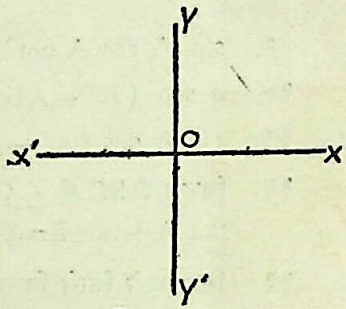
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ३

किसी भी परिमाण के कोणों का वृत्तीय फलन

(Circular functions of Angles of any magnitude)

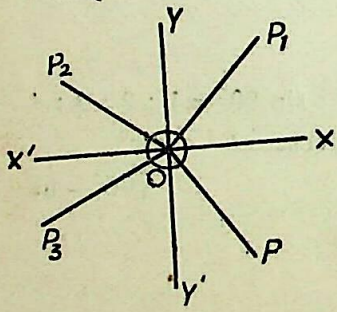
१४. धन और ऋण दूरियाँ—जब XOX′ और YOY′ दो परस्पर लम्ब रेखाएँ O बिन्दु पर काटें तो O से OX की दिशा में दूरियाँ धन (Positive) मानी जाती है, और OX′ दिशा में ऋण (Negative)। इसी प्रकार O से OY की दिशा में दूरियाँ धन और OY′ की दिशा में ऋण मानी जाती हैं।



चित्र ३·१

XOY, YOX′, X′OY′ और Y′OX भागों को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ पाद quadrant) कहते हैं।

१५ धन और ऋण कोण—त्रिकोणमिति में कोण एक सीधी रेखा द्वारा उसके एक बिन्दु के चारों ओर एक ही समतल में परिक्रमण करने से बनता है।



चित्र ३·२

मान लिया OP कोई परिक्रामी रेखा है जो बिन्दु O के चारों ओर OX से चलकर घड़ी की सुइयों के विपरीत दिशा में अर्थात् वामावृत (anti-clockwise) घूमती है और OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 चारों पादों में इसकी भिन्न-भिन्न स्थितियाँ हैं। OX और OY के बीच में कोण P_1OX एक समकोण से कम है, OY और OX′ के बीच में कोण

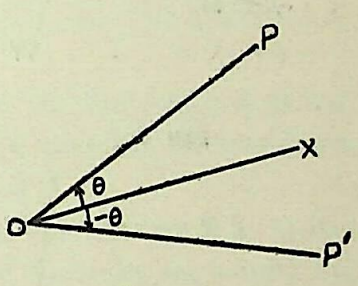
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

P_2OX एक समकोण से अधिक और दो समकोण से कम है; OX′ और OY′ के बीच में इस रेखा की स्थिति से बना कोण P_3OX दो समकोण से अधिक और तीन समकोण से कम है। इसी प्रकार OY′ और OX के बीच में इस रेखा की स्थिति से बना कोण P_4OX तीन समकोण से बड़ा और चार समकोण से कम है।

जब परिक्रामी रेखा OP बिन्दु O के चारों ओर एक पूर्ण परिक्रमा करके पुनः OX पर आ जाती है, तो वह चार समकोण का कोण बनाती है। पुनः OP_1 की स्थिति में आने पर यह एक ऐसा कोण बनाती है जो 360° + कोण P_1OX के बराबर है। इसी प्रकार जब परिक्रामी रेखा दो पूर्ण परिक्रमा करके पुनः OP_1 की स्थिति में आ जाती है तो 8 समकोण + कोण P_1OX बनाती हुई कही जाती है।

यदि OP रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से घड़ी की सुई की दिशा में अर्थात् दक्षिणावत (Clockwise) घूमें तो इस प्रकार बना कोण ऋण कहलाता है। चित्र में $\angle POX$ $(=\theta)$ धन है और $\angle P'OX = (-\theta)$ ऋण है।



चित्र ३·३

इस प्रकार यदि कोई परिक्रामी रेखा वामावर्त घूमने में n पूरी परिक्रमाएँ करके कोण θ बनाती है तो उस कोण को हम $n.360° + \theta$ अथवा $2n\pi + \theta$ लिखते हैं। इसी प्रकार यदि कोई परिक्रामी रेखा दक्षिणावर्त घूमने मे n पूरी परिक्रमाएँ करके कोण θ बनाती है, तो उसे हम $-(n.360° + \theta)$ अथवा $-(2n\pi + \theta)$ लिखते हैं।

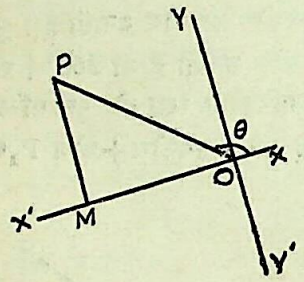
अतः कोई भी ऋजु रेखा किसी बिन्दु के परितः दो दिशाओं में परिक्रमण कर सकती है, (१) वामावर्त (Anti clockwise) और (२) दक्षिणावर्त (Clockwise)। यदि परिक्रमण वामावर्त से इस प्रकार बना कोण धनात्मक (Positive) होता है और यदि परिक्रमण दक्षिणावर्त (Clockwise) हो तो इस प्रकार बना कोण ऋणात्मक होता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

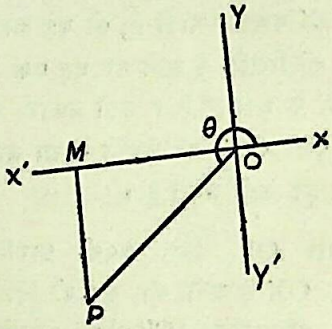
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६. **त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्न**—पहले अध्याय में हमने केवल न्यूनकोण के त्रिकोणमितीय अनुपात का वर्णन किया था। अधिक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों की भी परिभाषा उसी प्रकार की जा सकती है।

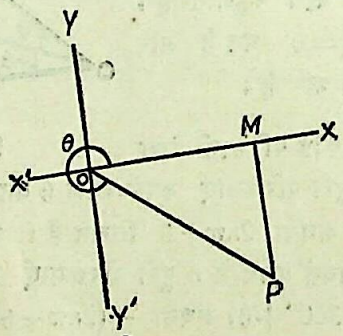
निम्न चित्रों में कोण POX, जिसका मान θ है, क्रमशः दूसरे, तीसरे तथा चौथे पादों (quadrants) में स्थित है और रेखा PM अक्ष X'OX पर लंब है। तब प्रत्येक चित्र के लिये



चित्र ३·४



चित्र ३·५



चित्र ३·६

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP}, \quad \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यहाँ रेखाओं PM और OM का संख्यात्मक मान लेते समय उनके पूर्व उचित चिह्न भी लगा देना चाहिये।

चित्रों से स्पष्ट है कि जब कोण θ दूसरे पाद में स्थित होगा, तो लंब PM धन और आधार OM ऋण होगा। इस प्रकार जब कोण θ तीसरे पाद में होगा तो लंब और आधार दोनों ऋण होंगे और जब θ चौथे पाद में होगा तो लब ऋण तथा आधार धन होगा। परिक्रामी रेखा OP को सदैव धन माना जाता है।

अतः प्रत्येक पाद में त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्न इस प्रकार होंगे :

(१) **प्रथम पाद**—जब परिक्रामी रेखा OP पहले पाद में है तो PM और OM दोनों धन हैं। अतः इस पाद में कोणों के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात धन हैं।

(२) **द्वितीय पाद**—जब परिक्रामी रेखा OP दूसरे पाद में है तो PM धन और OM ऋण है। अतः इस पाद में sin θ, cosec धन हैं और cos θ, tan θ, sec θ, cot θ ऋण हैं।

(३) **तृतीय पाद**—जब परिक्रामी रेखा OP तीसरे पाद में है तो PM और OM दोनों ऋण हैं। अतः इस पाद में tan θ और cot θ धन हैं और sin θ, cosec θ, cos θ और sec θ ऋण हैं।

(४) **चतुर्थ पाद**—जब परिक्रामी रेखा OP चौथ पाद में है, तो PM ऋण और OM धन है। अतः इस पाद में cos θ और sec θ धन हैं और sin θ, cosec θ, tan θ और cot θ ऋण हैं।

सक्षेप में सारणी में इस प्रकार प्रगट करते हैं :—

	प्रथम पाद में चिह्न	द्वितीय पाद में चिह्न	तृतीय पाद में चिह्न	चतुर्थ पाद में चिह्न
sin एवं cosec	+	+	−	−
cos एवं sec	+	−	−	+
tan एवं cot	+	−	+	−

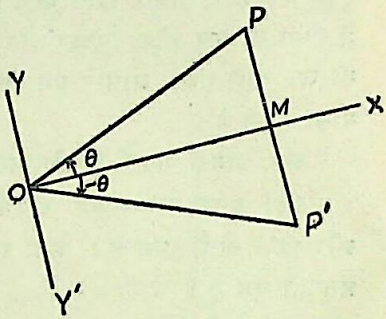
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१७. **कोण $(-\theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमतीय अनुपातों में ज्ञात करना**—मान लिया कि परिक्रामी रेखा OP अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से वामावर्त चलकर $\angle POX = \theta$ बनाती है। पुनः OX से दक्षिणावर्त चलकर OP′ की स्थिति में परिमाण में θ के बराबर कोण बनाती है, तो $\angle P'OX = -\theta$

मान लिया $OP' = OP$, PP′ मिलाने पर यह OX को बिन्दु M पर काटती है। $\triangle POM \equiv \triangle P'OM$

स्पष्ट है कि PM, P′M लम्बाई में तो बराबर हैं किन्तु PM धन है और P′M ऋण है। अतः $P'M = -PM$



चित्र ३·७

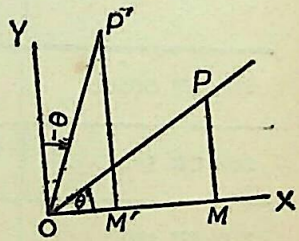
अतः $\sin(-\theta) = \sin P'OM = \frac{P'M}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos P'OM = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \tan P'OM = \frac{P'M}{OM} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta$

इसी प्रकार, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$ और $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

१८. **कोण $(90° - \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों में ज्ञात करना**—मान लिया परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से वामावर्त चलकर OP पर पहुँचती है जब कि $\angle POX = \theta$ और पुनः OX से OY तक चलकर विपरीत दिशा में OP′ स्थिति तक घूम जाती है। अतः $\angle P'OX = 90° - \theta$; $OP' = OP$ लेकर P और P′ से OX पर PM और P′M लम्ब डाले।



चित्र ३·८

चूँकि $\angle POX = \angle YOP' = \angle OP'M = \theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः $\triangle P'OM' \equiv \triangle POM$

इस प्रकार $P'M' = OM$ और $OM' = PM$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \sin P'OX = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos P'OX = \frac{OM'}{OP'} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan P'OM = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

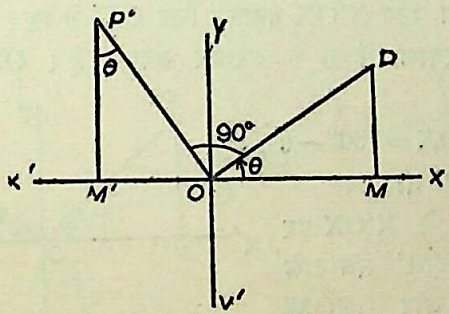
इसी प्रकार $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

और $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

१९. कोण $(90^\circ + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों में ज्ञात करना—मान लिया परिक्रामी रेखा OX से कोण θ घूमकर OP स्थिति में आती है। दूसरी बार पुनः मान लिया परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से वामावर्त चलकर 90° का कोण YOX बनाती है और फिर धन दिशा में आगे चलकर कोण $P'OY = \theta$ बनाती है। इस प्रकार $\angle P'OX = 90^\circ + \theta$

$OP' = OP$ ली। P और P' से XOX' पर PM और P'M' लम्ब डाले। स्पष्ट है कि



चित्र ३·९

$\angle M'P'O = \angle P'OY = \angle POM = \theta$

और $\triangle P'M'O = \triangle PMO$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अत: PM और OM′ बराबर हैं किन्तु चिह्न में OM′ की दिशा PM से विपरीत है और P′M′ तथा OM बराबर है और इनकी दिशा भी समान है।

$$\text{अत: } OM' = -PM \text{ और } P'M' = OM$$

$$\text{अत: } \sin(90^\circ+\theta) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ+\theta) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{OM}{-PM} = -\cot\theta$$

इसी प्रकार $\cot(90^\circ+\theta) = -\tan\theta$

$\sec(90^\circ+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

और $\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta) = \sec\theta$

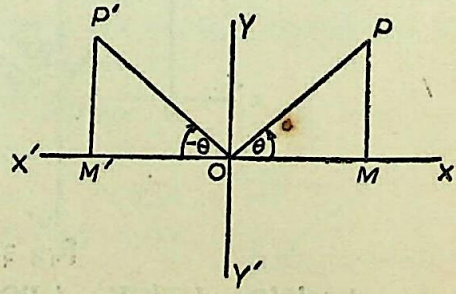
उदाहरण : $\sin 120 = \sin(90^\circ+30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$

२०. **कोण $(180^\circ-\theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों में ज्ञात करना**—मान लिया परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से चलकर धन कोण $POX = \theta$ बनाती हुई OP पर पहुँचती है। दूसरी बार पुन: प्रारम्भिक रेखा OX से धन दिशा में चलकर 180° का कोण X′OX बनाकर फिर OX′ से ऋण दिशा में चलकर $\angle P'OX'$ परिमाण में θ के बराबर बनाती है। OP′ उसकी नयी स्थिति है।

$\therefore \angle P'OX = 180^\circ - \theta$

OP′ = OP ली तथा P और P′ से X′OX पर PM और P′M′ लंब डाले $\angle P'OM'$ और $\angle POM$ परिमाण में बराबर हैं।

$\triangle P'OM' \equiv \triangle POM$



चित्र ३·१०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस प्रकार PM और P′M′ परिमाण और दिशा में समान है किन्तु OM और OM′ परिमाण में बराबर है किन्तु दिशा में विपरीत हैं।

$$\therefore \; P'M' = PM \quad \text{और} \quad OM' = -OM$$

अतः $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

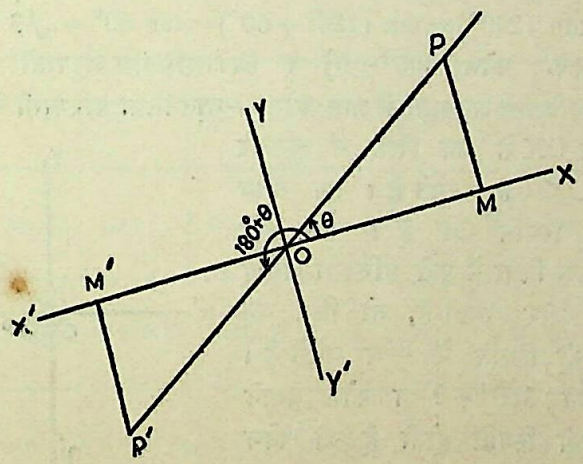
$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{PM}{-OM} = -\tan\theta$$

इसी प्रकार $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$ और $\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

उदाहरण : $\cos 135^\circ = \cos(180 - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

२१. कोण $(180^\circ + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों में ज्ञात करना—मान लिया परिक्रामी रेखा प्रारम्भिक



चित्र ३·११

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

रेखा OX से धन दिशा में चलकर OP स्थिति में $\angle XOP = \theta$ बनाती है। दूसरी बार पुनः परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से धन दिशा में चलकर पहले $X'OX = 180°$ बनाती है और फिर आगे चलकर $\angle P'OX' = \theta$ बनाती है। इस प्रकार कोण $P'OX = 180° + \theta$

$OP' = OP$ लो और P तथा P' से X'OX पर PM तथा P'M' लम्ब डालो। स्पष्ट है कि

$$\triangle P'OM' \equiv \triangle POM$$

$$\therefore \quad P'M' = -PM \text{ और } OM' = -OM$$

अतः $\sin(180° + \theta) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$

$$\cos(180° + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

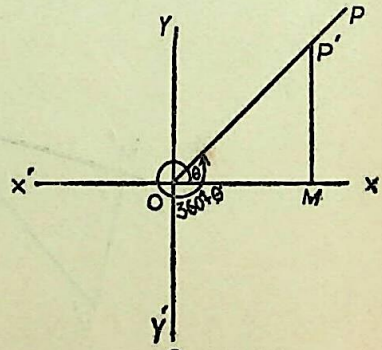
$$\tan(180° + \theta) = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{-PM}{-OM} = \tan\theta$$

इस प्रकार $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$ और $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\tan(240°) = \tan(180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

२२. कोण $(360° \pm \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों में ज्ञात करना—मान लिया परिक्रामी रेखा प्रारम्भिक स्थिति OX से धन दिशा में चलकर $\angle POX = \theta$ बनाती है। इस समय इसकी स्थिति OP है। अब यदि धनात्मक दिशा में पूरी परिक्रमा अर्थात् 360° और घूमती है, तो फिर वह पहली ही स्थिति में पहुँच जाती है। इस प्रकार $360° + \theta$ का कोण बनाने पर वही स्थिति होती है जो कोण $(+\theta)$ बनाने पर है।



चित्र ३·१२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\angle P'OX = 360° + \theta$ और $\angle POX = \theta$

इसलिये कोण $360° + \theta$ के सब त्रिकोणमितीय अनुपात परिमाण और चिह्न में वही होंगे जो कोण θ के हैं।

इसी प्रकार $360° - \theta$ का कोण बनाने पर परिक्रामी रेखा की वही स्थिति होगी जो कि कोण $(-\theta)$ बनाने पर होती है। इसलिये कोण $360° - \theta$ के सब त्रिकोणमितीय अनुपात परिमाण और चिह्न में वही होंगे जो कोण $(-\theta)$ के हैं।

यदि n पूर्णांक सख्या हो, तो $n.360° \pm \theta$ अथवा $2n\pi \pm \theta$ के त्रिकोणमितीय अनुपात कोण $(\pm\theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात के बराबर होते हैं।

उदाहरण : $\sin 600° = \sin (360° + 240°) = \sin 240°$

$$= \sin (180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

उपरोक्त सभी परिणामों को सारणी के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :—

कोण	$-\theta$	$90° - \theta$	$90° + \theta$	$180° - \theta$	$180° + \theta$	$360° - \theta$	$360° + \theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$+\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$-\tan\theta$	$+\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $\cos 6420^\circ$ का मान ज्ञात करो।

$$\cos 6420^\circ = \cos(18 \times 360^\circ - 60^\circ)$$
$$= \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$

उदाहरण २. सिद्ध करो कि

$$\cos\theta + \sin(\theta + 270^\circ) + \sin(\theta - 270^\circ) + \cos(180^\circ + \theta) = 0$$

बायाँ पक्ष $= \cos\theta + \sin(180^\circ + 90^\circ + \theta) + \sin(\theta - 270^\circ + 360^\circ) - \cos\theta$

$$= -\sin(90^\circ + \theta) + \sin(90^\circ + \theta) = 0$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin(180^\circ + \theta) \cdot \sec(-\theta)\ \mathrm{cosec}(180^\circ + \theta)}{\cos(270 + \theta)\ \cot(\theta - 360^\circ)\ \tan(90^\circ - \theta)} = \tan\theta \cdot \sec^2\theta$$

बायाँ पक्ष $= \dfrac{-\sin\theta \cdot \sec\theta \cdot (-\mathrm{cosec}\,\theta)}{\cos(180^\circ + 90^\circ + \theta) \cdot \cot(\theta - 360^\circ)\ \tan(90^\circ - \theta) + 360^\circ}$

$$= \frac{(\sin\theta \cdot \mathrm{cosec}\,\theta)\ \sec\theta}{-\cos(90^\circ + \theta) \cdot \cot\theta \cdot \cot\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta}{-(-\sin\theta) \cdot \cot\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta\ \tan\theta}{\sin\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta = \sec^2\theta \cdot \tan\theta$$

उदाहरण ४. सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC में

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B+C}{2} = \sec\frac{A}{2} \cdot \sec\frac{B+C}{2}$$

त्रिभुज में $A + B + C = 180^\circ$

अर्थात् $\dfrac{B+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$

और $$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B+C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\sec\frac{A}{2}\cdot\sec\frac{B+C}{2}$$

उदाहरण ५. चक्रीय चतुर्भुज ABCD में सिद्ध करो कि

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$

$\because$ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

$\therefore A+C=180^\circ$ और $B+D=180^\circ$

$\cos A=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

और $\cos B + \cos(180^\circ - D) = -\cos D$

$\therefore \cos A + \cos B = -\cos C - \cos D$

अत: $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

प्रश्नावली ५

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो :—

१. $\sin 225^\circ$ २. $\cos 240^\circ$

३. $\tan 300^\circ$ ४. $\tan 585^\circ$

५. $\cos 750^\circ$ ६. $\sin 930^\circ$

७. $\sin 6450^\circ$ ८. $\cos 6480^\circ$

९. $\tan(-330^\circ)$

सिद्ध करो :

१०. $\dfrac{\sin(180^\circ - A)}{\tan(180^\circ + A)} \cdot \dfrac{\cos(90^\circ - A)}{\tan(90^\circ + A)} \cdot \dfrac{\cos(360^\circ - A)}{\sin(-A)} = 0$

११. $\dfrac{\sin(180^\circ + \theta) \cdot \cos(360^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} \dfrac{\cot(90^\circ + \theta)}{\tan(180^\circ + \theta)\sin(180^\circ - \theta)} = \sin\theta$

१२. $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ + \theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} + \dfrac{\tan(90^\circ + \theta)}{\cot\theta} = 1$

१३. $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ + \cos 170^\circ = 0$

१४. त्रिभुज ABC में सिद्ध करो

(अ) $\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$

(आ) $\cos(A+B) + \cos C = 0$

चक्रीय चतुर्भुज ABCD में सिद्ध करो कि

१५. $\sin A + \sin B = \sin C + \sin D$

१६. $\sin(A+B) + \sin(C+D) = 0$

१७. $\cos(B+C) \quad \cos(A+D)$

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ४

दो कोणों के योग तथा अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात

(Trigonomatrical Ratios of the Sum and Difference of Two Angles)

२३. सिद्ध करो कि

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

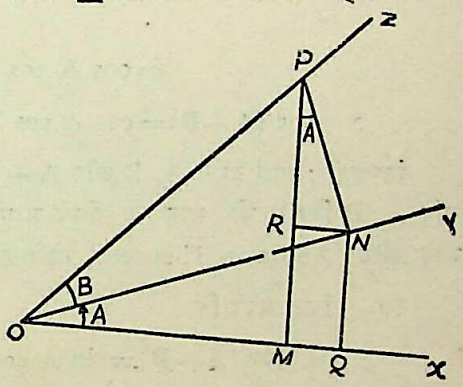
(ii) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

जब कि A, B और A+B न्यूनकोण हैं।

मान लिया परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से चलकर पहले $\angle YOX = A$ बनाती है और फिर $\angle ZOY = B$ बनाती है। OZ परिक्रामी रेखा की अन्तिम स्थिति है।

अतः $\angle ZOX = A+B$

OZ के किसी बिन्दु P से OX और OY पर क्रमशः PM और PN लम्ब डाले। पुनः N से OX पर NQ और PM पर NR लम्ब डाला। स्पष्ट है कि



चित्र ४१

$\angle RPN = 90° - \angle PNR$

$= \angle RNO = \angle NOX = A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(i) अब $\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}=\frac{PR+NQ}{OP}$

$$=\frac{PR}{OP}+\frac{NQ}{OP}=\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$+\frac{NQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}$$

$$=\cos A\,.\,\sin B+\sin A\cos B$$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\,.\,\sin B$$

(ii) और $\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-QM}{OP}=\frac{OQ-NR}{OP}$

$$=\frac{OQ}{OP}-\frac{NR}{OP}=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}$$

$$-\frac{NR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

टिप्पणी : यहाँ हमने A, B और A+B को न्यूनकोण लिया है। किन्तु यदि A, B किसी भी मान के लिये जाएँ तो भी ये सूत्र सत्य हैं; इन्हें **योग प्रमेय** (Addition Theorem) कहते हैं।

२५. सिद्ध करो कि

(i) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

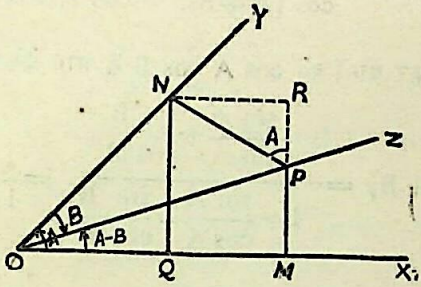
मान लिया परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से चलकर पहले $\angle YOX=A$ बनाती है और फिर विपरीत दिशा में $\angle ZOY=B$ बनाती है। अतः $\angle ZOX=A-B$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\angle RPN = 90^\circ - \angle PNR$

$= \angle YNR = \angle YOX = A$



चित्र ४·२

(i) $\sin(A-B) = \sin ZOX = \dfrac{PM}{OP}$

$$= \frac{RM - RP}{OP} = \frac{NQ - RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} - \frac{RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RP}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \,.\, \cos B - \cos A \,.\, \sin B$$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A-B) = \cos ZOX = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OQ + QM}{OP}$

$$= \frac{OQ + NR}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{NR}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B$$

$\therefore \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२५. tan (A+B) का मान ज्ञात करो।

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

अंश और हर दोनों को cos A cos B से भाग देने पर,

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A-\tan B}$$

$$\therefore\ \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan}$$

इसी प्रकार,

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

अर्थात्, $\cot(A+B)=\dfrac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-1}{\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos A}{\sin A}}$ (अंश और हर को sin A sin B से भाग करने पर)

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

अतः $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

$$\cot (A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

२६. $\sin (A+B+C)$ का मान ज्ञात करो।

$$\begin{aligned}\sin (A+B+C) &= \sin (A+\overline{B+C}) \\ &= \sin A \cos (B+C) + \cos A \sin (B+C) \\ &= \sin A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) \\ &\quad + \cos A (\sin B \cos C + \cos B \sin C) \\ &= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A \\ &\quad + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C\end{aligned}$$

इसी प्रकार $\cos (A+B+C)$

$$\begin{aligned}&= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C \\ &\quad - \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B\end{aligned}$$

२७. $\tan (A+B+C)$ का मान ज्ञात करो।

$$\tan (A+B+C) = \tan (A+\overline{B+C}) = \frac{\tan A + \tan (B+C)}{1-\tan A \cdot \tan (B+C)}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{\tan B + \tan C}{1-\tan B \tan C}}{1-\tan A + \dfrac{\tan B + \tan C}{1-\tan B \cdot \tan C}}$$

अंश और हर को $(1-\tan B \tan C)$ से गुणा करने पर,

$$\tan (A+B+C) = \frac{\tan A (1-\tan B \tan C) + \tan B + \tan C}{1-\tan B \tan C - \tan A (\tan B + \tan C)}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1-\tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

इसी प्रकार $\cot (A+B+C)$ का मान ज्ञात किया जा सकता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात करो।

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण २. $\tan 75^\circ$ का मान ज्ञात करो।

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$= \cos^2 B - \cos^2 A \quad \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

$$(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

$$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \quad \cdots\cdots(१)$$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सम्बन्ध (१) से

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$
$$=(1-\cos^2 A)\cos^2 B-\cos^2 A(1-\cos^2 B)$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A$$

टिप्पणी : उपरोक्त सम्बन्ध अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है।

उदाहरण ४. सिद्ध करो

$$\sin 50^\circ\cos 20^\circ-\cos 50^\circ\sin 20^\circ=\tfrac{1}{2}$$

$$\sin 50^\circ\cos 20^\circ-\cos 50^\circ\sin 20^\circ$$
$$=\sin(50^\circ-20^\circ)=\sin 30^\circ$$
$$=\tfrac{1}{2}$$

उदाहरण ५. सिद्ध करो

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0$$

पहला पद $=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\sin B}$

$$=\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$=\cot B-\cot A$$

इसी प्रकार दूसरा पद $=\cot C-\cot B$

और तीसरा पद $=\cot A-\cot C$

अतः बायाँ पक्ष $=\cot B-\cot A+\cot C-\cot B+\cot A-\cot C$

$$=0$$

उदाहरण ६. सिद्ध करो

$$\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1$$

$$\tan 45^\circ=\tan(20^\circ+25^\circ)$$

अर्थात् $1=\dfrac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात् $1-\tan 20^\circ \tan 25^\circ = \tan 20^\circ + \tan 25^\circ$

अतः $\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$

उदाहरण ७. यदि $A+B=45^\circ$, तो सिद्ध करो कि

$$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$$

$$\tan (A+B)=\tan 45^\circ$$

अर्थात् $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}=1$

अर्थात् $\tan A+\tan B=1-\tan A \tan B$

अर्थात् $\tan A+\tan B+\tan A \tan B=1$

अर्थात् $1+\tan A+\tan B+\tan A \tan B=1+1$

अर्थात् $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

प्रश्नावली ६

१. मान ज्ञात करो—

(अ) $\sin 75^\circ$

(आ) $\cos 15^\circ$

(इ) $\cos 75^\circ$

२. $\tan 15^\circ$ का मान ज्ञात करो।

सिद्ध करो कि

३. $\sin 47^\circ \cos 43^\circ + \cos 47^\circ \sin 43^\circ = 1$

४. $\sin 67^\circ \cos 22^\circ - \cos 67^\circ \sin 22^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

५. $\cos 11^\circ \cos 34^\circ - \sin 11^\circ \sin 34^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

६. $\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ = \dfrac{1}{2}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. $\sin(\theta+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$

८. $\sin(60^\circ-A)\cos(30^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)\sin(30^\circ+A)=1$

९. $\sin(60^\circ+A)+\sin(60^\circ-A)=\sqrt{3}\cos A$

१०. $\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B=\sin A$

११. $\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ-B)-\sin(45^\circ-A)\sin(45^\circ\ \ B)=\sin(A+B)$

१२. $\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\tan A+\tan B$

१३. $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$

१४. $\tan(45^\circ+\theta)\,.\,\tan(45^\circ-\theta)=1$

१५. $\cot(45^\circ+A)=\frac{\cot A-1}{\cot A+1}$

१६. $\frac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

१७. $\frac{1-\tan A\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

१८. (अ) $\tan 35^\circ+\tan 10^\circ+\tan 35^\circ\tan 10^\circ=1$

(ब) $\tan 13A-\tan 9A-\tan 4A=\tan 13A\tan 9A\tan 4A$

१९. $\tan 54^\circ=\frac{\cos 9^\circ+\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}$

२०. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

२२. $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\sin B\cos A$
$=\sin^2 A$

२३. $2\tan 10^\circ+\tan 40^\circ=\tan 50^\circ$

२४. $\tan 70^\circ-\tan 20^\circ-2\tan 40^\circ=4\tan 10^\circ$

२५. यदि $A+B=45^\circ$, तो सिद्ध करो कि
$(\cot A-1)(\cot B-1)=2$

२६. यदि $A+B+C=\pi$, तो सिद्ध करो कि
$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\,.\tan C$

२७. $\cos\dfrac{\phi-\theta}{2}-\sin\theta\sin\dfrac{\phi+\theta}{2}=\cos\theta\cos\dfrac{\phi+\theta}{2}$

$\left[\dfrac{\phi+\theta}{2}-\theta=\dfrac{\phi-\theta}{2}\right]^2$

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ८

योगफलों और गुणनफलों का रूपान्तरण

(Transformation of Sums and Products)

---

२८. दो ज्याओं (sines) अथवा कोज्याओं (cosines) का योग अथवा अन्तर—पिछले अध्याय में हम पढ़ चुके हैं कि

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \quad \cdots\cdots(i)$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \quad \cdots\cdots(ii)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \quad \cdots\cdots(iii)$$

और $$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \quad \cdots\cdots(iv)$$

(i) और (ii) को जोड़ने और घटाने से,

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \quad \cdots\cdots(v)$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \quad \cdots\cdots(vi)$$

(iii) और (iv) को जोड़ने तथा घटाने से,

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \quad \cdots\cdots(vii)$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B \quad \cdots\cdots(viii)$$

मान लिया $A+B=C$ और $A-B=D$, तो

$$A=\frac{C+D}{2} \text{ और } B=\frac{C-D}{2}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः (v), (vi), (vii) और (viii) में A और B के स्थान पर क्रमशः $\frac{1}{2}$ (C+D) और $\frac{1}{2}$ (C−D) रखने पर,

$$n\ C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad \ldots\ldots I$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad \ldots\ldots II$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad \ldots\ldots III$$

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}-\sin\frac{C-D}{2} \qquad \ldots\ldots IV$$

स्मरण रहे कि चौथे सूत्र में cos D में से cos C घटाया गया है।

टिप्पणी—उपरोक्त चारों सूत्रों को गुणनफल सूत्र (Product 'ormulae) कहते हैं। ये सूत्र कोणों के ज्याओं (sines) और कोटिज्याओं (cosines) के योग तथा अन्तर को ज्याओं और कोटिज्याओं के गुणनफल में प्रगट करते हैं।

२९. पिछली धारा के परिणाम (v), (vi), (vii) और (viii) भी बहुत ही महत्त्वपूर्ण हैं। इनके द्वारा कोणों की ज्याओं (sines) और कोटिज्याओं (cosines) के गुणनफल को उनके योग और अन्तर में बदला जा सकता है। इनको निम्न प्रकार याद रखना चाहिये :

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. सिद्ध करो कि

$$\sin 8\theta + \sin 2\theta = 2 \sin 5\theta \cos 3\theta$$

$$\sin 8\theta + \sin 2\theta = 2 \sin \frac{8\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{8\theta - 2\theta}{2}$$

$$= 2 \sin 5\theta \cos 3\theta$$

उदाहरण २. सिद्ध करो कि

$$\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = 2 \cos \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ + 40^\circ}{2}$$

$$= 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ = 2 \times \tfrac{1}{2} \cos 20^\circ$$

$$= \cos 20^\circ$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{\tan (A+B)}{\tan (A-B)}$$

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{2 \sin (A+B) \cos (A-B)}{2 \cos (A+B) \sin (A-B)}$$

$$= \tan (A+B) \cdot \cot (A-B)$$

$$= \frac{\tan (A+B)}{\tan (A-B)}$$

उदाहरण ४. सिद्ध करो कि

$$\sin (45^\circ + A) \sin (45^\circ - A) = \tfrac{1}{2} \cos 2A$$

$$\sin (45^\circ + A) \sin (45^\circ - A) = \tfrac{1}{2} [2 \sin (45^\circ + A) \sin (45^\circ - A)]$$

$$= \tfrac{1}{2} [\cos (45^\circ + A - 45^\circ - A) - \cos (45^\circ + A + 45^\circ - A)]$$

$$= \tfrac{1}{2} [\cos (45^\circ + A - 45^\circ + A) - \cos 90^\circ]$$

$$= \tfrac{1}{2} [\cos 2A - 0] = \tfrac{1}{2} \cos 2A$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ५. सिद्ध करो कि

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$$

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{13}+\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{13}-\frac{\pi}{13}\right)+\cos\left(\pi-\frac{10\pi}{13}\right)$$

$$+\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$=\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}-\cos\frac{10\pi}{13}-\cos\frac{8\pi}{13}$$

$$=0$$

उदाहरण ६. सिद्ध करो कि

$$\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)=\tfrac{1}{4}\cos 3\theta$$

$$\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2}\cos\theta\,[2\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)]$$

$$=\tfrac{1}{2}\cos\theta\,(\cos 120^\circ+\cos 2\theta)$$

$$=\tfrac{1}{4}\cos\theta\,(-\tfrac{1}{2}+\cos 2\theta)$$

$$=\tfrac{1}{4}\cos\theta\,(-1+2\cos 2\theta)$$

$$=\tfrac{1}{4}[2\cos 2\theta\,.\,\cos\theta-\cos\theta]$$

$$=\tfrac{1}{4}[\cos(3\theta+\theta)+\cos(2\theta-\theta)-\cos\theta]$$

$$=\tfrac{1}{4}[\cos 3\theta+\cos\theta-\cos\theta]$$

$$=\tfrac{1}{4}\cos 3\theta$$

प्रश्नावली ७

सिद्ध करो :—

१. $\sin 3\theta+\sin\theta=2\sin 2\theta\cos\theta$

२. $\sin 5\theta-\sin 3\theta=2\cos 4\theta\sin\theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. $\cos 8A - \cos 4A = -2 \sin 6A \sin 2A$

४. $\sin (m+n)\theta + \sin (m-n)\theta = 2 \sin m\theta \cos n\theta$

५. $\dfrac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$

६. $\dfrac{\sin A + \sin 5A}{\cos A - \cos 5A} = \cot 2A$

७. $\dfrac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos 2A + \cos 2B} = \tan (A+B)$

८. $\dfrac{\cos B - \cos A}{\cos A + \cos B} = \tan \dfrac{A+B}{2} \tan \dfrac{A-B}{2}$

९. $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

१०. $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = \sin 2A (1 + 2 \cos A)$

११. $\cos 52^\circ + \cos 68^\circ + \cos 172^\circ = 0$

१२. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$

१३. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$

१४. $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A} = \tan 3A$

१५. $\dfrac{\sin \theta + 2 \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\sin 3\theta + 2 \sin 5\theta + \sin 7\theta} = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

१६. $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$

१७. $\dfrac{\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A}{\sin A \cos 2A + \sin 3A \cos 6A} = \tan 5A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१८. $\sin(A+45^\circ)\sin(A-45^\circ) = -\frac{1}{2}\cos 2A$

१९. $4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sin 60^\circ$

२०. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

२१. $\cos 3A \sin 2A - \cos 4A \sin A = \cos 2A \sin A$

२२. $\cos 2\theta \cos \theta - \sin 4\theta \sin \theta = \cos 3\theta \cos 2\theta$

२३. $\sin\theta \sin 2\theta + \sin 3\theta \sin 6\theta - \sin 4\theta \sin 5\theta = 0$

२४. $\dfrac{\sin 11A \sin A + \sin 7A \sin 3A}{\cos 11A \sin A + \cos 7A \sin 3A} = \tan 8A$

२५. $\sin A \sin(60^\circ - A)\sin(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

२६. $\tan A \tan(60^\circ + A)\tan(120^\circ + A) = -\tan 3A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ६

बहुल और अपवर्तक कोणों क त्रिकोणमितीय अनुपात

(Trigonomatrical Ratios of Multiple and Subn ultiple Angles)

---

३०. 2A कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना—हम जानते हैं कि

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

यह सम्बन्ध A और B के प्रत्येक मान के लिये सत्य है B=A रखने पर,

$$\sin(A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

अर्थात् $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(ii) ∵ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

B = A रखने पर,

$$\cos(A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

अर्थात् $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

अतः $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

और $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(iii) इसी प्रकार $\tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A}$

अर्थात् $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

और $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$

(iv) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

दाहिने पक्ष को $\sec^2 A$ से गुणा तथा भाग देने पर,

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A \cdot \sec^2 A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{\frac{2 \sin A}{\cos A}}{1 + \tan^2 A}$$

अतः $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

(v) इसी प्रकार $\cos 2A = \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A) \sec^2 A}{\sec^2 A}$

$$= \frac{1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

अतः $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

३१. 3A कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना—

(i) $\sin 3A = \sin(A + 2A) = \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A$

$= \sin A (1 - 2 \sin^2 A) + \cos A \cdot 2 \sin A \cos A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A \cos^2 A$$
$$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A (1 - \sin^2 A)$$

अतः $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos (A + 2A) = \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$
$$= \cos A (2 \cos^2 A - 1) - \sin A \cdot 2 \sin A \cos A$$
$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A \cdot \sin^2 A$$
$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A (1 - \cos^2 A)$$

अतः $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(iii) $\tan 3A = \tan (A + 2A) = \dfrac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \cdot \tan 2A}$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A \cdot \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$= \frac{\tan A (1 - \tan^2 A) + 2 \tan A}{(1 - \tan^2 A) - 2 \tan^2 A}$$

[अंश और हर को $(1 - \tan^2 A)$ से गुणा करने पर]

अतः $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

इसी प्रकार,

$$\cot 3A = \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A}$$

३३. **अपवर्तक कोण (Sub-multiple angles)**—यदि अनुच्छेद ३१ के सूत्रों में A के स्थान पर $\frac{1}{2}A$ रखदें, तो

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$ और $2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$

$$\therefore \cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos}{2}}, \quad \sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

अतः $\tan \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

$$\tan A = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1-\tan^2 \frac{A}{2}}, \quad \cot A = \frac{\cot^2 \frac{A}{2} - 1}{2\cot \frac{A}{2}}$$

$$\sin A = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1+\tan^2 \frac{A}{2}}, \quad \cos A = \frac{1-\tan^2 \frac{A}{2}}{1+\tan^2 \frac{A}{2}}$$

३४. $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ और $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ का मान ज्ञात करना—

$\because \quad 2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$

$A = 22\frac{1}{2}^\circ$ रखने पर,

$$2\sin^2 (22\tfrac{1}{2}^\circ) = 1 - \cos 45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

अर्थात् $\sin^2 (22\frac{1}{2}^\circ) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

अतः $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$

क्योंकि $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ धनात्मक होता है।

इसी प्रकार $\cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३५. **sin 18° का मान ज्ञात करना—**

मान लिया $\theta = 18°$ $\therefore 5\theta = 90°$

अर्थात् $2\theta = 90° - 3\theta$

$\therefore \sin(2\theta) = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

अर्थात् $2 \sin\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\because \cos\theta \neq 0$ क्योंकि $\theta = 18°$, $\cos\theta$ से भाग देने पर,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

अर्थात् $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore \sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4(-1)}}{2 \times 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\because$ sin 18° न्यून कोण का ज्या है, अतः $\sin\theta$ धनात्मक है।

$$\therefore \sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

अतः $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

३६. **cos 36° का मान ज्ञात करना—**

$\because \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\theta = 18°$ रखने पर

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{8}(5 + 1 - 2\sqrt{5}) = \frac{8 - 5 - 1 + 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$$

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\tan A$$

उदाहरण २. सिद्ध करो कि

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sec 2\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}$$

$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$=\frac{(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\frac{2(1+\tan^2\theta)}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\cos 2\theta}=2\sec 2\theta$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि

$$\cos 4A=1-8\sin^2 A+8\sin^4 A$$

$$\cos 4A=\cos^2 2A-\sin^2 2A$$

$$=(1-2\sin^2 A)^2-(2\sin A\cos A)^2$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=1-4\sin^2 A+4\sin^4 A-4\sin^2 A\cos^2 A$$
$$=1-4\sin^2 A+4\sin^4 A-4\sin^2 A(1-\sin^2 A)$$
$$=1-8\sin^2 A+8\sin^4 A$$

उदाहरण ४. सद्ध करो कि

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}$$

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\left(\frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\frac{A}{2}-1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\cot\frac{A}{2}-1}{\cot\frac{A}{2}+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}\right)^2$$

[अंश और हर को $\sin\frac{A}{2}$ से गुणा करने पर]

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

दाहिने पक्ष के अंश और हर को cos A से भाग देने पर,

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\frac{\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}}=\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}$$

उदाहरण ५. सिद्ध करो कि

$$\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ=\frac{1}{16}.$$

$$\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ$$

$$=\tfrac{1}{4}(2\cos 6^\circ \cos 66^\circ)(2\cos 42^\circ \cos 78^\circ)$$

$$=\tfrac{1}{4}(\cos 72^\circ+\cos 60^\circ)(\cos 120^\circ+\cos 36^\circ)$$

$$=\tfrac{1}{4}\left(\sin 18^\circ+\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{64}\left[(\sqrt{5})^2-1^2\right]$$

$$=\frac{1}{64}(5-1)=\frac{1}{16}$$

प्रश्नावली ८

१. sin 2A और cos 2A के मान बताओ यदि

(अ) $\sin A=\frac{3}{5}$

(आ) $\cos A=\frac{5}{13}$ और (इ) $\tan A=\frac{5}{6}$

२. यदि $\tan A=\frac{1}{3}$, $\tan B=\frac{1}{7}$, तो सिद्ध करो कि

(अ) $\tan(2A+B)=1$

(आ) $\cos 2B=\sin 4A$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सिद्ध करो कि

४. $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}$ cot A

५. $\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}=\cot A$

६. $\frac{\sin 4A}{\sin A}=2(\cos 3A+\cos A)$

७. $\sin 8A=8 \sin A \cos A \cos 2A \cos 4A$

८. $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan 2A+\sec 2A$

९. $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

१०. $\operatorname{cosec} 2A-\cot 2A=\tan A$

११. $\frac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A$

१२. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2 \tan 2\theta$

१३. $\operatorname{cosec} 2A+\cot 2A=\cot A$

१४. $(\cos A+\sin A)^2=1+\sin 2A$

१५. $\tan 3A \times \tan 2A \times \tan A=\tan 3A-\tan 2A-\tan A$

१६. $\frac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}=\tan A$

१७. $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}-\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=2 \tan 2A$

१८. $3 \sin A-\sin 3A=2 \sin A(1-\cos 2A)$

१९. $4 \sin^3 \theta \cos 3\theta+4 \cos^3 \theta \sin 3\theta=3 \sin 4\theta$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२०. $\cot A = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)$

२१. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\sec 2\theta$

२२. $\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)} = \sin 2A$

२३. $\sin 5A = 16\sin^5 A - 20\sin^3 A + 5\sin A$

२४. $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$

२५. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = \tan A + \sec A = \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

२६. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

२७. $\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)$

२८. $\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)$

२९. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$

३०. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$

३१. $\sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ = \frac{5}{16}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अध्याय ७

सरल त्रिकोणमितीय समीकरण
(Simple Trigonometrical Equations)

३७. **त्रिकोणमितीय समीकरण**—निम्न समीकरण पर विचार करो—

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

इस समीकरण में किसी अज्ञात कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपात का समावेश है। इस कारण इस समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं।

अतः त्रिकोणमितीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें एक अथवा अधिक अज्ञात कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का समावेश हो।

इस समीकरण के हल करने का अर्थ है कि अज्ञात कोणों का मान निकालो। अज्ञात कोणों के वे मान जो इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं समीकरण के **मूल** कहलाते हैं।

त्रिकोणमितीय समीकरण को हल करना

मान लो $\sin\theta = \frac{1}{2}$ को हल करना है। स्पष्ट है कि

$$\theta = 30^\circ \text{ और } 150^\circ$$

परन्तु यदि इन मूलों में 360° अथवा 360° का कोई भी पूर्ण अपवर्त्य जोड़ दिया जावे तो इस प्रकार जो कोण प्राप्त होंगे उन सबकी ज्या (sine) भी $\frac{1}{2}$ होगी। जैसे 390°, 750°, 510 आदि कोणों की sine भी $\frac{1}{2}$ है। इनके अतिरिक्त इन मूलों में से 360° अथवा 360° का कोई भी पूर्ण अपवर्त्य घटाने से जो ऋण कोण प्राप्त होंगे उनकी sine भी $\frac{1}{2}$ होगी। इस प्रकार समीकरण $\sin\theta = \frac{1}{2}$ के अनन्त धन और अनन्त ऋण मूल प्राप्त होंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस कारण त्रिकोणमितीय समीकरण को हम दो प्रकार से हल कर सकते हैं :—

(१) समीकरण के मूल किन्हीं निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत ज्ञात करना जैसे θ के मान 0° और 180° के बीच अथवा 0° और 360° के बीच ज्ञात करना।

(२) समीकरण के मूल बिना किन्हीं निश्चित सीमाओं अर्थात् व्यापक रूप में ज्ञात करना।

पहले हम समीकरण हल करने में ऐसे कोण ज्ञात करेंगे जिनके मान 0° और 360° के मध्य हों और जो समीकरण को संतुष्ट करते हों।

३८. त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करते समय ध्यान देने योग्य बातें :—

(अ) यदि समीकरण में एक से अधिक त्रिकोणमितीय अनुपात हों, तो सुविधानुसार उन सबको किसी एक अनुपात के पदों में बदल लेना चाहिये।

(आ) इस समीकरण को साधारण बीजगणित की रीति से इस विशेष अनुपात के लिये हल करना चाहिये।

(इ) अब उस कोण के न्यूनतम मान को ज्ञात करना चाहिये जिसके त्रिकोणमितीय अनुपात का मान प्राप्त मान के बराबर है।

उदाहरण १. हल करो :

$$\sin\theta - \cos\theta = 1 \text{ जबकि } 0 \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$$

वर्ग करने पर,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 1$$

अर्थात् $1 - \sin 2\theta = 1$

$\therefore \sin 2\theta = 0$

यदि $\sin 2\theta = 0$ तो 2θ का न्यूनतम मान 0 है

पुनः $\sin 180^\circ = 0$ और $\sin 360^\circ = 0$

$\therefore \quad 2\theta = 0, 180^\circ$ और 360°

अतः $\theta = 0, 90^\circ$ और 180°

किन्तु $\theta = 0^\circ$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करते।

अतः θ के संभव मान 90° और 180° हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. हल करो जबकि $0 \leqslant \theta \leqslant 360°$

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta$$

$$\sin 3\theta - \sin 2\theta = 0$$

अर्थात् $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 0$

अर्थात् $\sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta) = 0$

या तो $\sin \theta = 0$ $\therefore \theta = 0, 180°\ 360°$

या $3 - 4 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta = 0$

अर्थात् $3 - 4 (1 - \cos^2 \theta) - 2 \cos \theta = 0$

अर्थात् $4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0$

$$\therefore \quad \cos \theta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \quad 4 \times (-1)}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$\therefore$ $\theta = 36°$ और $(360° - 36°)$ अर्थात् $324°$

ऋणात्मक मान छोड़ने पर

अतः θ के सम्भव मान $0°, 36°, 180°, 324°$ और $360°$ समीकरण संतुष्ट करते हैं।

३९. समीकरणों के व्यापक हल के लिये नीचे कुछ सूत्र दिये जाते हैं जिनमें वे सब कोण सम्मिलित हैं जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं। इन सूत्रों की उपपत्ति पाठ्यक्रम से बाहर होने के कारण नहीं दी जा रही है।

इन सूत्रों में कोणों को मापने के लिये 'रेडियन' मात्रक अपनाया गया है। हम पढ़ चुके हैं कि π रेडियन $= 180°$।

सूत्र १. मान लिया α वह सबसे छोटा धन कोण है जिसका ज्या (sine) दिया हुआ है तो उन सब कोणों का व्यापक व्यंजक (general expression) जिन सबका एक ही ज्या है,

$$n\pi + (-1)^n \alpha$$

होता है, जहाँ कि n शून्य अथवा धन या ऋण पूर्णांक है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सूत्र २. मान लिया α वह सबसे छोटा धन कोण है जिसका कोटिज्या (cosine) दिया हुआ है, तो उन सब कोणों का व्यापक व्यंजक जिन सबका एक ही कोटिज्या है,

$$2n\pi \pm \alpha$$

होता है, जहाँ कि n शून्य अथवा कोई धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

सूत्र ३. मानलिया α वह सबसे छोटा धन कोण है जिसकी स्पर्शज्या (tangent) दिया हुआ है, तो उन सब कोणों का व्यापक व्यंजक जिन सबका एक ही स्पर्श-ज्या है,

$$n\pi + \alpha$$

होता है, जहाँ पर n शून्य अथवा कोई धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

टिप्पणी १. जब $\sin\theta = 1$, तो $\theta = (2n + \frac{1}{2})\pi$

और जब $\cos\theta = 0$, तो $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$

२. जिन कोणों के ज्या (sine) समान होते हैं, उन सबके व्युत्क्रम ज्या (cosecant) भी समान होते हैं, अतः $n\pi + (-1)^4\alpha$ में वे सब कोण आ जाते हैं जिनका cosec वही है जो α का है।

इसी प्रकार व्युत्क्रम कोटिज्या (secant) के व्यापक मान के लिये $2n\pi \pm \alpha$ तथा कोटिस्पर्शज्या (cotangent) के लिये $n\pi + \alpha$ सूत्र प्रयोग में लाते हैं।

उदाहरण ३. हल करो—

$$\cos^2\theta - \sin\theta - \tfrac{1}{4} = 0$$

समीकरण को एक ही अनुपात $\sin\theta$ में बदलने पर,

$$(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta - \tfrac{1}{4} = 0$$

अर्थात् $4(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta - 1 = 0$

अर्थात् $4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 = 0$

अर्थात् $(2\sin\theta + 3)(2\sin\theta - 1) = 0$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore \quad \sin\theta = -\frac{3}{2}$ अथवा $\frac{1}{2}$

$\sin\theta$ परिमाण में कभी 1 से अधिक नहीं होता

$\therefore$ इसका मान $-\frac{3}{2}$ छोड़ने पर,

$$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

अतः $\quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

उदाहरण ४. हल करो—

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 0$$

समीकरण इस प्रकार लिखने पर,

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 2\alpha = 0$$

अर्थात् $2\cos 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$

अर्थात् $\quad \cos 2\alpha\,(2\cos\alpha + 1) = 0$

$\therefore$ या तो $\cos 2\alpha = 0$ या $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

जब $\cos 2\alpha = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad 2\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

अतः $\quad \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

और जब $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

अतः $\quad \alpha = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ५. हल करो—

$$\tan\theta+\tan 2\theta+\tan\theta\,.\,\tan 2\theta=1$$

अर्थात् $\tan\theta+\tan 2\theta=1-\tan\theta\,.\,\tan 2\theta$

अर्थात् $\dfrac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\,.\,\tan 2\theta}=1$

अर्थात् $\tan(\theta+2\theta)=1$

अर्थात् $\tan 3\theta=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\quad 3\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}=(4n+1)\dfrac{\pi}{4}$

अतः $\theta=(4n+1)\dfrac{\pi}{12}$

उदाहरण ६. हल करो—

$$\sin n+\sqrt{3}\cos n=\sqrt{2}$$

प्रत्येक पद को 2 से भाग देने पर,

$$\frac{1}{2}\,.\,\sin n+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos n=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

स्पष्ट है ऐसा कोण जिसका ज्या $\dfrac{1}{2}$ और कोज्या $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है, $\dfrac{\pi}{6}$ है

$\therefore\quad \sin\dfrac{\pi}{6}\sin n+\cos\dfrac{\pi}{6}\cos n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अर्थात् $\cos\left(n-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore \quad n-\frac{\pi}{6}=2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

अतः $$n=2n\pi+\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4}$$

प्रश्नावली ९

निम्न समीकरणों को हल करो जब θ न्यूनकोण है :—

१. $4 \cos \theta=3 \sec \theta$ २. $\sec^2 \theta=2 \tan^2 \theta$

३. $2 \sin \theta=\operatorname{cosec} \theta$ ४. $\operatorname{cosec}^2 \theta+\cot^2 \theta=3$

५. $\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ६. $\tan \theta+\cot \theta=2$

७. $2(\cos^2 \theta-\sin^2 \theta)=1$ ८. $\cos \theta+\sin \theta=1$

निम्न समीकरणों को हल करो जब θ का मान शून्य और 2π के बीच हो :—

९. $\cos \theta+\sec \theta=\frac{5}{2}$ १०. $\sin 2\theta-\sin \theta=0$

११. $2 \sin^2 \theta+3 \cos \theta=0$ १२. $3 \cos^2 \theta+7 \sin^2 \theta=4$

व्यापक हल ज्ञात करो :—

१३. $\sin \theta=\frac{1}{2}$ १४. $\cos \theta=-\frac{1}{2}$

१५. $\cot \theta=1$ १६. $4 \sin^2 \theta=3$

१७. $7 \sin^2 \theta+3 \cos^2 \theta=4$ १८. $\sin^2 \theta-2 \cos \theta+\frac{1}{4}=0$

१९. $\tan^2 \theta=3 \operatorname{cosec}^2 \theta-1$ २०. $\sin 9\theta=\sin \theta$

२१. $\sin \theta+\cos \theta=\sqrt{2}$ २२. $\sin \theta\sqrt{3}-\cos \theta=\sqrt{2}$

२३. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=4$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

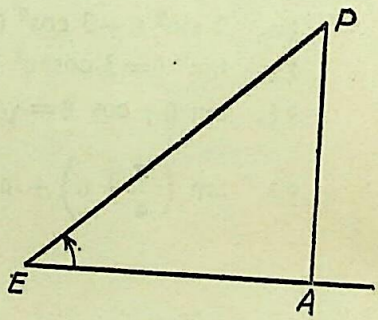
अध्याय ८

ऊँचाई और दूरियाँ ज्ञात करने में त्रिकोणमिति का प्रयोग

(Application to Simple Cases of Height and Distances)

४०. त्रिकोणमिति का एक मुख्य उद्देश्य बिन्दुओं के बीच की दूरी अथवा लक्षित वस्तुओं की ऊँचाई को बिना नापे हुए ज्ञात करना है। यदि हमें कोणों की माप ज्ञात हो और कुछ ऊँचाइयों अथवा दूरियों का ज्ञान हो, तो इनकी सहायता से अगम्य ऊँचाइयों अथवा दूरियों का पता लगा सकते हैं। कोणों की माप के लिये साधारणतया दो यंत्र काम में लाये जाते हैं, एक सेक्सटैन्ट (Sextant) और दूसरा थियोडोलाइट (Theodolite)

४१. **उन्नयन कोण और अवनमन कोण** (Angle of Elevation and Angle of Depression)—मान लिया P किसी ऊँचाई पर एक वस्तु अथवा किसी मीनार की चोटी है और कोई व्यक्ति नीची धरातल पर के किसी बिन्दु E से उस वस्तु अथवा चोटी को देखता है (चित्र ८१)। EA क्षैतिज धरातल है। सरल रेखा PE क्षैतिज धरातल EA के साथ जो कोण बनाती है वह कोण बिन्दु E पर बिन्दु P का **उन्नयन कोण** (Angle of Elevation) कहलाता है।

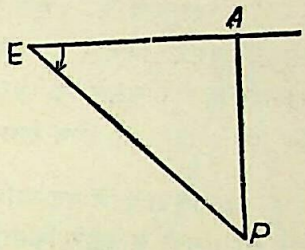


चित्र ८·१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कहलाता है। इस स्थिति में विन्दु P, E से ऊँचा है। यदि विन्दु P विन्दु E से नीचे है तो ∠PEA **अवनमन कोण** (Angle of Depression) कहलाता है। (चित्र ८·२)



चित्र ८·२

स्मरण रहे—प्रश्न को भली प्रकार पढ़कर प्रश्नानुसार आकृति बनानी चाहिये।

उदाहरण १. एक मीनार क्षैतिज धरातल पर खड़ी है। उसके पाद से 150 मीटर की दूरी पर मीनार की चोटी का उन्नयन कोण (angle of elevation) 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

चित्र ८·३ में AB मीनार है क्षैतिज रेखा EB=150 मीटर तथा उन्नयन कोण AEB=30°

समकोण त्रिभुज AEB में,

$$\frac{AB}{EB} = \tan AEB = \tan 30°$$

$$\therefore \quad AB = EB \,.\, \tan 30°$$

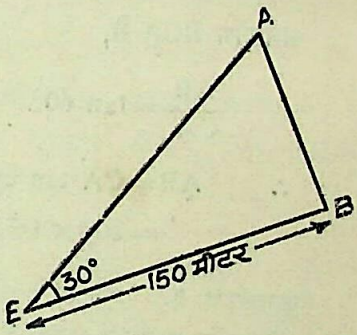
$$= 150 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 50 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 50\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

$$50 \times 1{\cdot}732$$

$$= 86{\cdot}6 \text{ मीटर}$$



चित्र ८·३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

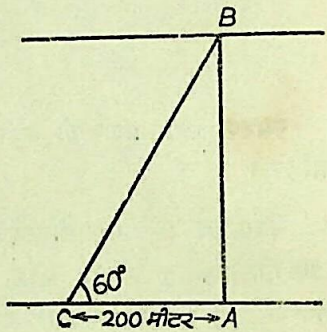
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. एक व्यक्ति नदी के किनारे खड़ा हुआ अपने ठीक सामने दूसरे किनारे पर एक पेड़ को देखता है। 200 मीटर नदी के किनारे-किनारे चलने के पश्चात् वह देखता है कि पेड़ की दिशा नदी के किनारे से 60° का कोण बनाती है। नदी की चौड़ाई ज्ञात करो।

मान लिया पहले वह व्यक्ति A स्थान पर था। नदी के दूसरे किनारे पर ठीक सामने स्थान B पर पेड़ खड़ा है। अब वह व्यक्ति BA के साथ समकोण बनाता हुआ नदी के किनारे-किनारे 200 मीटर चलकर स्थान C पर पहुँचता है। तब $\angle ACB = 60°$ बनाता है।

$AC = 200$ मीटर

और AB नदी की चौड़ाई है।



चित्र ८·४

समकोण BCA से,

$$\frac{AB}{CA} = \tan 60°$$

$$\therefore \quad AB = CA \tan 60° = 200 \times \sqrt{3} \text{ मीटर}$$

$$= 200 \times 1{\cdot}732 = 346{\cdot}4 \text{ मीटर}$$

उदाहरण ३. एक ऊँचे चबूतरे से किसी झण्डे के शिखर का उन्नयन कोण 60° और पाद का अवनमन कोण (angle of depression) 30° है। यदि चबूतरे से झण्डे की क्षैतिज दूरी 15 मीटर हो, तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात करो।

मान लिया AB झण्डा है और CD चबूतरा।

$\angle ACE = 60°$,

$\angle BCE = 30°$

$CE = DB = 15$ मीटर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\frac{AE}{CA} = \tan 60^\circ$$

$\therefore \quad AE = CE \tan 60^\circ$

$= 15\sqrt{3}$ मीटर

और $\quad BE = CE \tan 30^\circ$

$= 15 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= 5\sqrt{3}$ मीटर

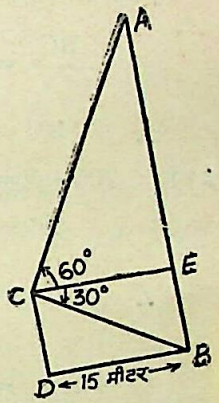
अतः झण्डे की ऊँचाई $= AB = AE + BE$

$= 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3}$ मीटर

$= 20 \times 1{\cdot}732$

$= 34{\cdot}64$ मीटर



चित्र ८·५

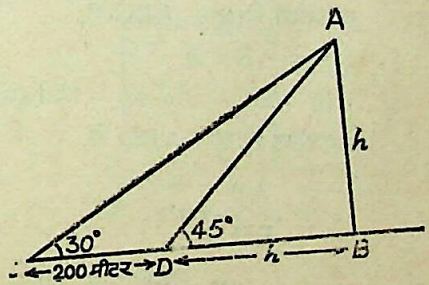
उदाहरण ४. एक चिमनी की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। 200 मीटर चिमनी की ओर चलने पर उन्नयन कोण 45° हो जाता है। चिमनी की ऊँचाई बताओ।

मान लिया चिमनी AB का शिखर A है। C पर चिमनी का उन्नयन कोण $ACB = 30^\circ$ है और 200 मीटर चिमनी की ओर चलने पर D स्थान पर उन्नयन कोण $ADB = 45^\circ$ है।

$CD = 200$ मीटर

यदि $AB = h$ हो, तो

$BD = AB = h$



चित्र ८·६

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\frac{BC}{h} = \cot 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = h \cot 30^\circ$$

अर्थात् $200 + h = h\sqrt{3}$

अर्थात् $200 = h\sqrt{3} - h = h(\sqrt{3} - 1)$

$$\therefore \quad h = \frac{200}{\sqrt{3} - 1} = \frac{200}{1.732 - 1}$$

$$= \frac{200}{.732} = 273.2 \text{ मीटर}$$

उदाहरण ५. एक पहाड़ी के शिखर से देखने पर दो लगातार किलोमीटर के पत्थरों का अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

मान लिया पहाड़ी AB की ऊँचाई h किमी है।

$\angle ACB = \angle EAC = 45^\circ$

$\angle ADB = \angle EAD = 60^\circ$

CD 1 किमी

समकोण त्रिभुज ABC से,

BC = AB h

$\therefore$ BD BC − 1 = $(h - 1)$ किमी

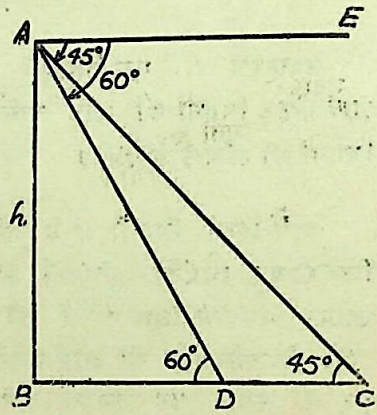
समकोण त्रिभुज ABD से,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \quad AB = BD \tan 60^\circ$$

अर्थात् h $(h - 1)\sqrt{3}$

$h\sqrt{3} - \sqrt{3}$



चित्र ८·७

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात् $\sqrt{3}=h\sqrt{3}-h=h(\sqrt{3}-1)$

$$\therefore \quad h=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{1\cdot732}{1\cdot732-1}$$

$$\frac{1\cdot732}{\cdot732}=2\cdot366 \text{ किमी}$$

उदाहरण ६. झील के तल से h मीटर ऊँचाई से देखने पर एक बादल का उन्नयन कोण α है और झील में इसके प्रतिविम्ब का अवनमन कोण β है। सिद्ध करो कि बादल की तल से ऊँचाई

$$\frac{h \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} \text{ है।}$$

(बादल का प्रतिविम्ब झील के तल से उतना ही नीचा बनता है जितना कि बादल तल के ऊपर है।)

मान लिया AB झील का तल ; C बादल और D इसका प्रतिविम्ब है। मान लिया तल से बादल की ऊँचाई x मीटर है।

$$\therefore \quad CE=DE=x$$

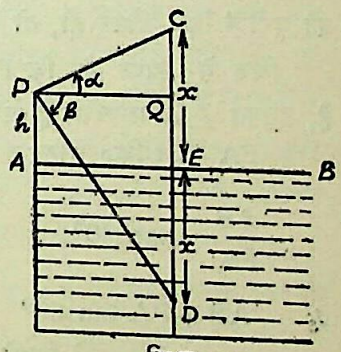
झील के तल से h मीटर ऊँचाई पर एक विन्दु P है।

$\angle CPQ=\alpha$, $\angle DPQ=\beta$

अब $CQ=CE-EQ$

$=CE-AP=x-h$

और $DQ=DE+EQ=x+h$



चित्र ८·८

$$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{CQ}{PQ}$$

$$\text{और } \tan\beta=\frac{DQ}{PQ}$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{CQ}{PQ}\times\frac{PQ}{DQ}=\frac{CQ}{DQ}=\frac{x-h}{x+h}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थात् $(x+h)\tan\alpha=(x-h)\tan\beta$

अर्थात् $x\tan\alpha+h\tan\alpha=x\tan\beta-h\tan\beta$

अर्थात् $x(\tan\alpha-\tan\beta)=-h(\tan\alpha+\tan\beta)$

$$\therefore\ x=-h\cdot\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=-h\cdot\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$=-h\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

$$=-h\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

भीतर के तल से बादल की ऊँचाई $=\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

उदाहरण ७. किसी प्रकाश स्तम्भ के पाद P से दो जहाज A और B क्रमशः दक्षिण-पश्चिम और दक्षिण से 15° पूर्व की ओर दिखाई देते हैं। उसी समय B जहाज A से दक्षिण-पूर्व की ओर दिखाई देता है। यदि PA की दूरी 4 कि० मीटर हो, तो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात करो।

चित्र से स्पष्ट है कि PAB समकोण त्रिभुज है, इसका ∠A समकोण है और ∠P=60°

PA =4 कि० मीटर

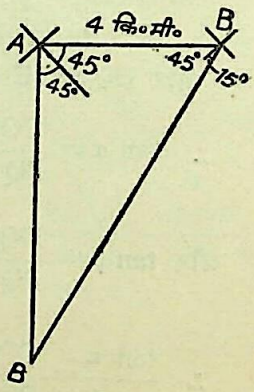
$$\frac{AB}{PA}=\tan 60^\circ$$

$\therefore$ AB = PA tan 60°

$=4\times\sqrt{3}$ किमी

$=4\times1{\cdot}732$

$=6{\cdot}928$ किमी



चित्र ८·९

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १०

१. सूर्य का उन्नयन कोण क्या होगा यदि एक स्तम्भ की परछांई इसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुना हो।

२. एक पतंग 100 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रही है। यदि डोरी क्षैतिज के साथ 60° का कोण बनाती हो, तो डोरी की लम्बाई ज्ञात करो।

३. एक मीनार के आधार से 50 मीटर की दूरी पर मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

४. 20 मीटर लम्बे रस्से का एक सिरा एक ध्वजा के शिखर से 20 मीटर नीचे बँधा है और दूसरा सिरा जमीन पर पृथ्वी से बँधा है। इस स्थिति में रस्सा जमीन से 60° का कोण बनाता है। बताओ ध्वजा की ऊँचाई क्या है ?

५. किसी चिमनी के आधार की ओर क्षैतिज रेखा पर 100 मीटर चलने से उसके शिखर का उन्नयन कोण 30° से 45° हो जाता है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करो।

६. एक खजूर के पेड़ की ऊँचाई ज्ञात करनी है। एक व्यक्ति उससे कुछ दूरी पर खड़ा होकर उसकी चोटी का उन्नयन कोण 60° का नापता है। इसी सीध में वह 50 मीटर और पीछे हटता है, तो अब चोटी का उन्नयन कोण 30° है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात करो।

७. एक अधूरी मीनार का उन्नयन कोण उससे 120 मीटर की दूरी से देखने पर 45° है। मीनार को कितना ऊँचा और बनाना चाहिये कि उसी स्थान से उन्नयन कोण 60° हो जाय।

८. नदी के एक किनारे पर एक वृक्ष खड़ा है। दूसरे किनारे पर वृक्ष के ठीक सामने एक मनुष्य खड़ा है जिसने पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 60° देखा है। अब वह उसी सीध में 30 मीटर पीछे हट जाता है तो उन्नयन कोण 30° देखता है। पेड़ की ऊँचाई और नदी की चौड़ाई बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. एक गिर्जे की मीनार की परछांई 5·6 मीटर है। यदि एक मीटर पैमाने की परछांई 40 सेमी हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

१०. किसी पेड़ का ऊपरी भाग टूट कर (बिना पेड़ से अलग हुए) पृथ्वी के साथ 30° का कोण बनाता है। यदि पेड़ की जड़ से उस स्थान की दूरी जहाँ चोटी पृथ्वी को छूती है 50 मीटर हो, तो पेड़ की ऊँचाई ज्ञात करो।

११. 225 मीटर ऊँची पहाड़ी से देखने पर एक मीनार की चोटी और पाद के अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

१२. एक मीनार की छाया क्षैतिज समतल पर 20 मीटर अधिक हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नयन कोण 45° से 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

१३. समान ऊँचाई के दो खम्भे 20 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर लगे हैं और सड़क के बीच में किसी बिन्दु से उनके उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। खम्भों की ऊँचाई ज्ञात करो।

१४. एक मन्दिर के ऊपर एक झण्डा लगा हुआ है। मन्दिर के आधार से 20 मीटर की दूरी पर मन्दिर और झण्डे के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मन्दिर की ऊँचाई तथा झण्डे की लम्बाई ज्ञात करो।

१५. एक वायुयान जो 1000 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है उत्तर की ओर एक शत्रु की पनडुब्बी को 30° के अवनमन कोण पर और दक्षिण की ओर एक युद्ध पोत को 45° के अवनमन कोण पर देखता है। पनडुब्बी और युद्ध पोत के बीच की दूरी ज्ञात करो।

१६. किसी स्थान से एक चिमनी की चोटी के उन्नयन कोण की स्पर्श-ज्या (tangent) $\frac{4}{5}$ है। उस स्थान से 5 मीटर दूर जाने पर उसकी चोटी के उन्नयन कोण की स्पर्श-ज्या $\frac{3}{4}$ हो जाती है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१७. एक समतल मैदान में स्थित एक मीनार का उन्नयन कोण उसी तल के एक स्थान से 45° है। उस स्थान से मीनार की ओर 25 मीटर बढ़ने पर उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई बताओ।

१८. किसी स्तम्भ की चोटी का उन्नयन कोण भूमि पर एक बिन्दु से 60° है। 100 मीटर स्तम्भ से दूर चलने पर उसका उन्नयन कोण 30° हो जाता है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात करो।

१९. समुद्र के एक सीधे किनारे पर तीन बिन्दु क, ख और ग इस प्रकार हैं कि क ख=खग=2 किमी। एक जहाज बिन्दु ख की ओर समकोण बनाता हुआ चलता है और किसी स्थान पर क ग 60° का कोण बनाता है तथा उसी दिशा में दस मिनट और चलने के पश्चात् क ग उस पर 120° का कोण बनाता है। जहाज की चाल मालूम करो।

२०. एक जहाज पश्चिम की ओर 10 किमी प्रति घन्टे के वेग से जा रहा है। उस पर से दोपहर के 12 बजे एक दीप स्तम्भ (Light-house) को उत्तर से 30° पश्चिम की ओर देखा जाता है और दोपहर के 2 बजे उत्तर से 60° पूर्व की ओर देखा जाता है। जहाज के प्रथम स्थान से दीपस्तम्भ की दूरी बताओ।

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उत्तरमाला

प्रश्नावली १

(१) $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{4}{3}$, $\cot A = \frac{3}{4}$, $\sec A = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$; $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\tan B = \frac{3}{4}$, $\cot B = \frac{4}{3}$, $\sec B = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{5}{3}$ ।

(२) $\sin D = \frac{5}{13}$, $\cos D = \frac{12}{13}$, $\tan D = \frac{5}{12}$, $\cot D = \frac{12}{5}$, $\sec D = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec} D = \frac{13}{5}$; $\sin F = \frac{12}{13}$, $\cos F = \frac{5}{13}$, $\tan F = \frac{12}{5}$, $\cot F = \frac{5}{12}$, $\sec F = \frac{13}{5}$, $\operatorname{cosec} F = \frac{13}{12}$ ।

(३) $AC = 9$ (४) $2\sqrt{3}$ मीटर ।

प्रश्नावली ३

(१) $\sin A = \frac{5}{13}$, $\tan = \frac{5}{12}$, $\cot A = \frac{12}{5}$, $\sec A = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{13}{5}$

(२) $\tan A = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{5}{3}$

(३) $\sin A = \frac{21}{29}$, $\cos A = \frac{20}{29}$, $\tan A = \frac{21}{20}$, $\sec A = \frac{29}{20}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{21}$

(४) $\cos A = \frac{8}{17}$, $\tan A = \frac{15}{8}$

(५) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (६) $\sqrt{2}$

(७) $\sin A = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\sec A = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

(८) $\cos \theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\tan \theta = \frac{a^2-b^2}{2ab}$

(९) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (१०) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ (११) $\frac{13}{84}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५

(१) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (२) $-\frac{1}{2}$ (३) $-\sqrt{3}$ (४) 1

(५) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (६) $-\frac{1}{2}$ (७) $-\frac{1}{2}$ (८) 1

(९) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्नावली ६

) (अ) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, (आ) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, (इ) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(२) $2-\sqrt{3}$

प्रश्नावली ८

(१) (अ) $\sin 2A = \frac{24}{25}$, $\cos 2A = \frac{7}{25}$

(आ) $\sin 2A = \frac{120}{169}$, $\cos 2A = \frac{119}{169}$

(इ) $\sin 2A = \frac{60}{61}$, $\cos 2A = \frac{11}{61}$

प्रश्नावली ९

(१) $\frac{\pi}{3}$ (२) $\frac{\pi}{4}$ (३) $\frac{\pi}{4}$

(४) $\frac{\pi}{4}$ (५) $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$ (६) $\frac{\pi}{4}$

(७) $\frac{\pi}{3}$ (८) $0^\circ, \frac{\pi}{2}$ (९) $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१०) $0°, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ (११) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

(१२) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$ (१३) $n\pi+(-1)^n \frac{\pi}{6}$

(१४) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (१५) $n\pi+\frac{\pi}{4}$

(१६) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (१७) $n\pi+\frac{\pi}{6}$

(१८) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (१९) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(२०) $\frac{n\pi}{4}$ अथवा $\frac{(2n+1)\pi}{10}$ (२१) $2n\pi+\frac{\pi}{4}$

(२२) $n\pi+(-1)^n \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ (२३) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

प्रश्नावली १०

(१) 30° (२) 115·47 मीटर
(३) 86·6 मीटर (४) 37·32 मीटर
(५) 136·6 मीटर (६) 43·3 मीटर
(७) 87·84 मीटर (८) 25 98 मीटर, 15 मीटर
(९) 14 मीटर (१०) 86 6 मीटर
(११) 95·1 मीटर (१२) 27·32 मीटर
(१३) 8·66 मीटर (१४) 20 मीटर, 14·64 मीटर
(१५) 1732 मीटर (१६) 60 मीटर
(१७) 59·15 मीटर (१८) 86·6 मीटर
(१९) 13·856 किमी प्रति घन्टा (२०) 5 किमी।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

परिशिष्ट

एक अज्ञात राशि वाले द्विघात समीकरण का आलेखी हल

अब तक हमने ऋजु रेखाओं के आलेखों (Graphs) पर विचार किया है। हमने देखा है कि एक घाती फलन सदा एक ऋजु रेखा से प्रदर्शित किया जा सकता है। समीकरण की सहायता से य को भिन्न-भिन्न मान देकर र के संगत मान निकाल कर भिन्न-भिन्न युग्म प्राप्त करते हैं। इन युग्मों की संख्या उतनी हो सकती है, जितने रेखा पर बिन्दु हो सकते हैं। इन विन्दुओं को अंकित करके मिलाने से ऋजु रेखा प्राप्त होती है।

यह विधि व्यापक है और एक से अधिक घात वाले फलनों अथवा समीकरणों के आलेख भी इसी विधि से खींचे जा सकते हैं। इस बार प्राप्त आलेख ऋजु रेखा न होकर कोई वक्र (curve) होगा जिसका रूप आलेख अथवा समीकरण के रूप से निर्धारित होगा।

इन आलेखों के खींचने में कई विन्दुओं का निर्धारण करना आवश्यक है, क्योंकि जितने अधिक बिन्दु निर्धारित किये जायेंगे उतनी ही सही वक्र का आकार होगा।

उदाहरण १. $र = य^२$ का आलेखन करो।

∴ जब $र = य^२$

य=...	०	±१	±२	±३	±३·५	±४	±४·५	±५
र=..	०	१	४	१	१२·२५	१६	२०·२५	·२५

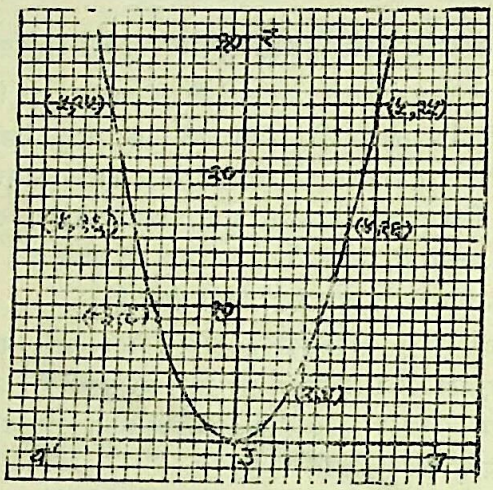
पैमाना—य अक्ष पर २ छोटे खाने १ इकाई और र अक्ष पर १ छोटा खाना १ इकाई प्रदर्शित करता है।

उपरोक्त सारणी से विन्दुओं को अंकित करके मिलाने से एक ऐसा चित्र बनता है जो मूल बिन्दु से होकर जाता है और जैसे-जैसे यह ऊपर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उठता है अनन्त तक फैलता जाता है। ऐसी आकृति को **परवलय** (Parabola) अथवा **वर्गमल वक्र** (Square-root curve) कहते हैं क्योंकि



चित्र—१

इसके प्रत्येक बिन्दु का भुज उसके कोटि का वर्गमूल है। और इस वक्र से चित्र की सीमा के अन्दर किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है। चित्र के देखने से निम्नलिखित तथ्य स्पष्ट होते हैं।

(१) कोटि सदा धनात्मक है, जैसे-जैसे हम **य** के ऋणात्मक मान से धनात्मक मान की ओर चलते हैं पहले यह मूल बिन्दु उ तक कम होता जाता है और पुनः यह अनन्त तक बढ़ता जाता है। अतः स्पष्ट है कि वक्र पहले और दूसरे चतुर्थांश (quadrants) में अनन्त तक फैलता जाता है।

(२) यदि **र-अक्ष** पर आकृति को मोड़ दिया जाय, तो पहले चतुर्थांश का वक्र दूसरे चतुर्थांश के वक्र को पूरा-पूरा ढक लेता है अर्थात् **र-अक्ष** पर चित्र समयित (Symmetrical) है।

(३) पूरा चित्र **य-अक्ष** के ऊपर है। यदि $र = -य^2$, तो पूरा चित्र **य-अक्ष** के नीचे होगा और तीसरे और चौथे चतुर्थांश में अनन्त तक फैलेगा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

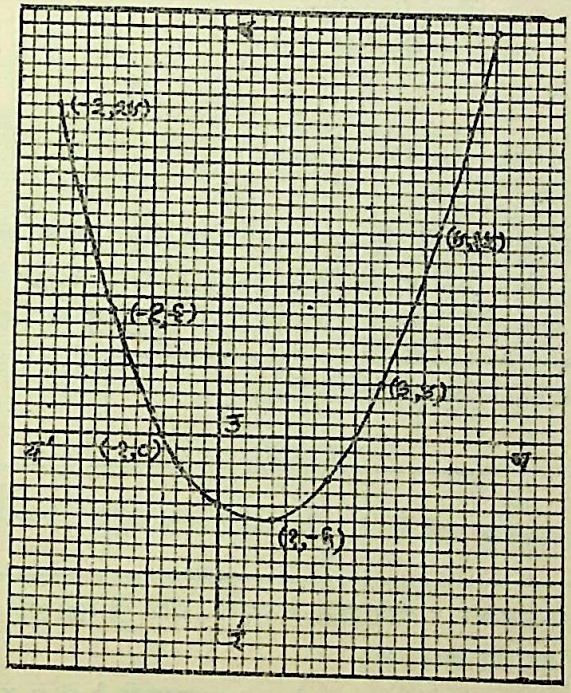
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण २. २य^{२} — ३य — ५ का आलेखन करो।

मान लिया र = २य^{२} — ३य — ५

यदि य =	४	३	२	१	०	—१	—२	—३
तो र =	१५	४	—३	—६	—५	०	९	२४

पैमाना—य-अक्ष पर ४ छोटे खाने १ इकाई तथा र-अक्ष पर १ छोटा खाना १ इकाई प्रदर्शित करता है।



चित्र—२

उपरोक्त सारणी से प्राप्त बिन्दुओं को अंकित करके मिलाने से भी एक परवलय बनता है किन्तु यह उदाहरण १ मे बने परवलय से भिन्न है। यह

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

र-अक्ष के समयित नहीं है और य-अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है जिनके भुजांक $\frac{५}{२}$ तथा —१ हैं।

उदाहरण ३. लेखा-चित्र द्वारा समीकरण $२य^२ — ५य — ३ = ०$ के मूल ज्ञात करो।

वर्ग-समीकरण को लेखा-चित्र द्वारा हल करने की तीन विधियाँ हैं। प्रत्येक का अपना महत्त्व है। अच्छा हो यदि विद्यार्थी इन तीनों विधियों से ही परिचित हों।

पहली विधि—समीकरण $२य^२ — ५य — ३ = ०$ को इस प्रकार लिखते हैं :

$$य^२ = \frac{५}{२}य + \frac{३}{२}$$

मान लिया $र = य^२ = \frac{५}{२}य + \frac{३}{२}$

अब हम उदाहरण १ की तरह $र = य^२$ का लेखाचित्र खींचते हैं जो परवलय है और इसी पैमाने पर समीकरण $र = \frac{१}{२}(५य + ३)$ का लेखाचित्र निम्न सारिणी से प्राप्त बिन्दुओं द्वारा खींचते हैं जो एक ऋजु रेखा क ख है।

जब य =	३	५	—३
तो र =	९	१४	—६

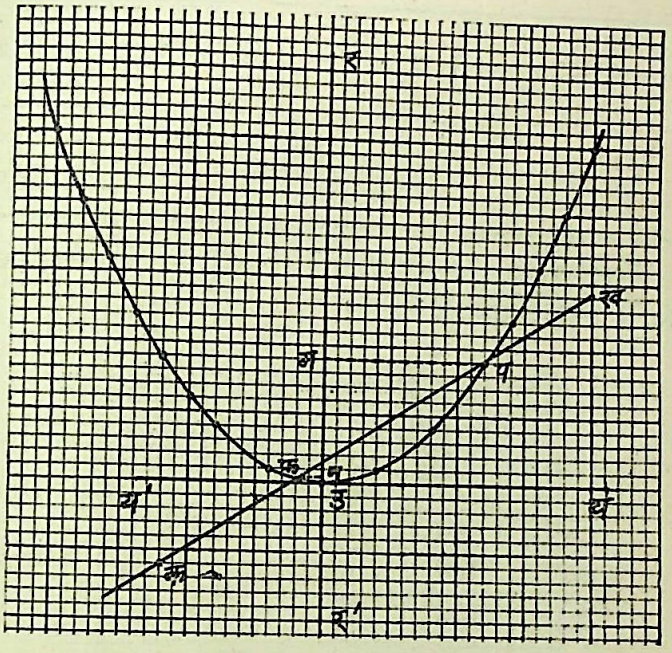
पैमाना—य-अक्ष पर ४ छोटे खाने १ इकाई और र-अक्ष पर १ छोटा खाना १ इकाई प्रदर्शित करता है।

रेखा क ख परवलय को बिन्दु प और फ पर काटती है। प और फ के भुज समीकरण $य^२ = \frac{५}{२}य + \frac{३}{२}$ को संतुष्ट करते हैं। अतः समीकरण के

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मूल प्राप्त करने के लिये परवलय $र = य^२$ और ऋजु रेखा $र = \frac{५}{२}य + \frac{३}{२}$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के भुज लेखा-चित्र से पढ़ लेने चाहिये।



चित्र—३

प और फ के भुज क्रमशः ३ और $-\frac{१}{२}$ हैं अतः समीकरण के मूल ३ और $-\frac{१}{२}$ हैं।

दूसरी विधि—समीकरण $२य^२ - ५य - ३ = ०$ को हम इस प्रकार लिखते हैं : $२य^२ - ५य = ३$ और इससे हम यह ज्ञात करते हैं कि य के किस मान के लिये फलन का मान ३ है। तब हम $र = २य^२ - ५य$ और $र =$ के लेखा-चित्र खींचकर समीकरण का हल निकालते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

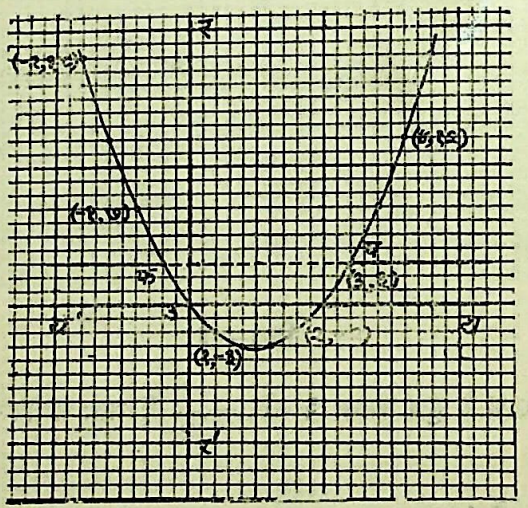
प्रतिच्छेद बिन्दुओं के भुज समीकरण के मूल होंगे।

$$y=2x^2-5x$$

जब

य=	—२	—१·५	—१	—·५	०	·५	१	१·५	२	२·५	३	३·५	४	४·५
र=	१८	१२	७	३	०	—२	—३	—३	—२	०	३	७	१२	१८

पैमाना—य-अक्ष पर ४ छोटे खाने १ इकाई और र-अक्ष पर १ छोटा खाना १ इकाई प्रदर्शित करता है।



चित्र—४

र = ३ का लेखा-चित्र परवलय को बिन्दु प और फ पर काटता है जिनके भुज क्रमशः ३ तथा $-\frac{१}{२}$ हैं। अतः समीकरण के मूल ३ तथा $-\frac{१}{२}$ हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

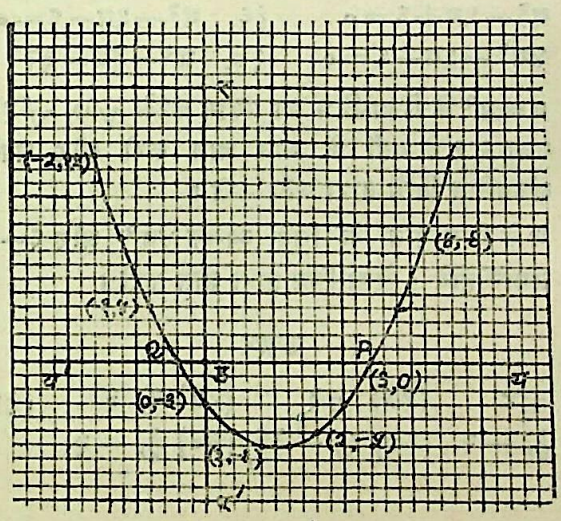
तीसरी विधि—मान लिया $र = २य^२ - ५य - ३$

यहाँ हमें य के वे मान ज्ञात करने हैं जो कोटि र को शून्य करदे। य-अक्ष के प्रत्येक बिन्दु पर र शून्य होता है। अतः उन बिन्दुओं के भुज जहाँ य-अक्ष $२य^२ - ५य - ३$ के लेखा-चित्र को काटती है, दी हुई समीकरण के मूल होंगे।

जब अब $र = २य^२ - ५य - ३$

य=	—२	—१·५	—१	—·५	०	·५	१	१·५	२	२·५	३	३·५	४	४·५
र=	१५	९	४	०	—३	—५	—६	—६	—५	—३	०	४	९	१५

पैमाना—य अक्ष पर ४ छोटे खाने १ इकाई और र-अक्ष पर १ छोटा खाना १ इकाई प्रदर्शित करते हैं।



चित्र—५

बिन्दु अंकित करके मिलाने पर अभीष्ट परवलय प्राप्त होता है जो य-अक्ष को बिन्दु प और फ पर काटता है। प और फ के भुज ३ और $-\frac{१}{२}$ हैं।

अतः समीकरण $२य^२ - ५य - ३ = ०$ के मूल ३ और $-\frac{१}{२}$ हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली

निम्नलिखित के लेखा-चित्र खींचो :

१. $र = -य^2$ २. $र = २य^2$
३. $र = ४य^2$ ४. $र = -४य^2$
५. $र = \frac{१}{२}य^2$ ६. $र^2 = य$

निम्न फलनों के लेखा-चित्र अंकित करो :

७. $\frac{१}{२}य^2$ ८. $२·५\ य^2$ ९. $\frac{य^2}{४} + २य$

१०. $२य^2 - य + १$ ११. $२य^2 - य - ३$ १२. $२य^2 - ५य + २$

निम्नलिखित समीकरणों को लेखा-चित्र द्वारा हल करो :

१३. $य^2 = १६$ १४. $३य^2 - ५ = २२$
१५. $य^2 - ५य + ६ = ०$ १६. $य^2 - ५य - ६ = ०$
१७. $४य^2 + ५य - ६ = ०$ १८. $य^2 - \frac{२}{३}य = ३२$

१९. $र = य^2$ के लेखा-चित्र का प्रयोग करके $\sqrt{७}$, $\sqrt{३१}$ तथा १·४ तथा २·१ के वर्गों के मान ज्ञात करो और अपने उत्तरों की अंकगणित विधि द्वारा जाँच करो।

२०. य के किस मान के लिये व्यंजक $४य^2$ और $६ - ५य$ के मान समान होंगे ? लेखा-चित्र द्वारा ज्ञात करो।

उत्तर

(१३) ± ४ (१४) ± ३ (१५) २, ३ (१६) ६, −१
(१७) $\frac{३}{४}$, −२ (१८) ६, $-\frac{१६}{३}$ (२०) $\frac{३}{४}$, −२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi